Chapitre "systèmes linéaires" (pdf du cours).

Définitions, théorème et algorithme de résolution.

On commence par un exemple : Prenons le système suivant : (S_1) : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -\frac{3}{2}y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

<u>But</u> : afin de résoudre des systèmes avec un nombre arbitraire d'équations et un nombre arbitraire de variables, on vise un algorithme de résolution. (ici algorithme de Gauss).

Définition : Un système linéaire d'équations est :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $(x_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ sont des variables et $(a_{ij}, b_i)_{i \in [\![1;m]\!], j \in [\![1;n]\!]}$ des constantes.

Un n-uplet est solution du système si $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \ \forall i \in [\![1;m]\!]$.

Remarque : nous avons vu qu'un système peut avoir une unique solution, il se peut également qu'il y ait une infinité ou aucune.

exemple (S_2) $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ -4x - 2y = 2 \end{cases}$ admet une infinité de solutions car $2x + y = -1 \Rightarrow -4x - 2y = 2$

donc $(S) \Leftrightarrow \{(x, -1-2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

NB : les solutions d'un système à n inconnues sont des points d'un espace cartésien de n dimensions

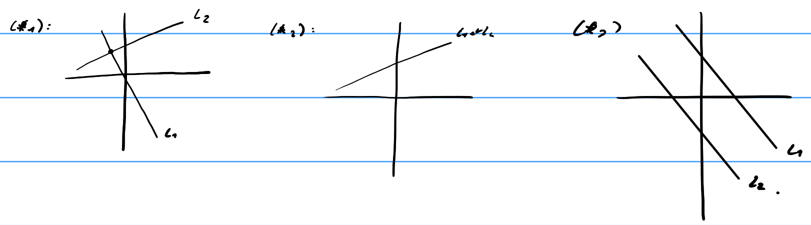
et chaque équation caractérise un sous-espace affine de cet ensemble de dimension n-1.

(si $n=2$, chaque point est sur une droite)
(si $n=3$, - - - - - - un plan).

et les solutions du système sont donc les points d'intersection de ces espaces.

(S_3) : $\begin{cases} 2x + y = 1 & (L_1) \\ x + \frac{1}{2}y = 1 & (L_2) \end{cases}$ on a $L_2 \Rightarrow 2x + y = 2$, ce qui contredit L_1 et (S) n'admet pas de solution.

en effet les droites $(d_1) : y = -2x - 1$ et $(d_2) : y = -2x + 2$ sont parallèles !



exercice :

(1) : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

ces deux systèmes sont équivalents

(2) : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 6x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

Définition : deux systèmes à n variables sont équivalents s'ils admettent le même ensemble de solutions.
Le but de l'algorithme de Gauss est de remplacer un système linéaire de départ avec un système "plus simple" qui lui est équivalent

Dans cet algorithme, nous aurons droit à 3 opérations :

1) Echanger l'ordre des équations.

2) Multiplier une équation par une constante non-nulle

3) Remplacer une équation par une combinaison linéaire de cette équation et d'une autre du système

Ces 3 opérations ont dû être réalisées dans le but d'arriver vers un système linéaire échelonné : (Ech) : $\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = b_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 = b_2 \\ x_1 = b_1 \end{cases}$.

exemple : $(*) : \begin{cases} 3x_3 = 9 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

$(*) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 9 \end{cases} \overset{L_1 \to 3L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} . \overset{L_2 \to L_2 - L_1}{\iff} \left.\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 9 \\ -x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_3 = 9 \quad \Rightarrow x_3 = 3 \end{cases} \right\} \Rightarrow x_2 = 1 \Bigg\} \Rightarrow x_1 = 3.$ Système échelonné

d'où $(*) \iff \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Un système linéaire obtenu à partir des 3 opérations décrites ci-dessus est équivalent au système de départ.

Exos 2, 3 et 4, (a2 → b2)

$(a2) : \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$. $(a2) \iff \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2z = -1 \\ x + y + z = 2 \\ 2x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

$(b2) : \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y + 2z = 2 \\ y + 3z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

$(a3) : \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3x - 4y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \\ 2x + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$(b3) : \begin{cases} 2x + 4z = 0 \\ 3x - 4y + 12z = 2 \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 12z = 2 \\ x + 2z = 0 \\ x - 2y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z = 2 \\ x + 2z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 \\ x = -2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$

$(a4) : \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + 2z = 3t + 1 \\ 2x + y - 2z = 2 + t \\ x - 3y + z = 2t - 1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3x = 4t + 3 \\ 4x - 5y = 5t \\ 2x + y - 2z = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{3}t + 1 \\ 5y = \dots \\ z = \end{cases}$

La matrice associée à (a2) est $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Exo 2.b.

$(b) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_2 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

on a donc $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + 3z = 2 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ ainsi l'ensemble des solutions du système (b2) est $S = \{(1, 2, 0)\}$.

Exo 4.a.

$(a) \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 \\ 2x + y - 2z - t = 2 \\ x - 3y + z - 2t = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{L_3 \to L_3 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_2]{L_2 \to \frac{1}{3}L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \frac{13}{3} & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + 2z - 3t = 1 & \Rightarrow x = y - 2z + 3t + 1 = 1 + \frac{4}{3}t \\ y - 2z + \frac{5}{3}t = 0 & \Rightarrow y = -\frac{5}{3}t + 2z \\ -5z + \frac{13}{3}t = -2. & \Rightarrow z = \frac{2}{5} + \frac{13}{15}t \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{5}{3}t + \frac{26}{15}t + \frac{4}{5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{15}t$

et solution $(a) \iff (x, y, z, t) \in S = \{(1, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0) + t(\frac{4}{3}, \frac{1}{15}, \frac{13}{15}, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exo 1

$(c) : \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 3 \end{array}\right)$

d'où $(c) \iff \begin{cases} x - y - 3z = -1 & \Rightarrow x = -\frac{1}{4} + z \\ 4y + 8z = 3 & \Rightarrow y = \frac{3}{4} - 2z \end{cases}$ et $S = \{(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}) + z(1, -2) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exo 2.

$(c) : \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x - 2y + 3z = 0 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \to L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \to L_1 + L_3]{L_2 \to L_2 + 3L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ d'où $S = \{(-1, 3, 3)\}$.

Exo 3.

$(c) : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_2]{L_1 \to L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - 7z = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2}z - 2z \iff x = \frac{3}{2}z \\ y = \frac{7}{2}z \end{cases}$ et $S = \{z(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Exo 4.

$(c) : \begin{cases} x + y - z - t = 1 \\ x - 2y + 3z + t = 1 \\ x - y + 3z + t = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to \frac{L_3 + 2L_2}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x - z - t = 1 \\ y = 0 \\ t = -2z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ t = -2z \\ x = -z + 1 \end{cases}$

et $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$

Si $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ sont solutions d'un système linéaire homogène alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ est également solution.

On appelle système linéaire associé à un système $(*)$: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ le système (H): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

Théo. Soit $(*)$ un système linéaire et (H) son système linéaire associé.

Alors l'ensemble S des solutions de $(*)$ s'écrit de la forme $S = \{ p + h \mid h$ est solution de $(H) \}$ où p est une solution de $(*)$.

$= \{ p + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3 + \dots \lambda_k \vec{v}_k : \lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{R} \}$ où $k = n -$ nombre de pivots dans l'algo de Gauss.

preuve: où $(\vec{v}_{1 \dots k})$ sont des solutions de (H).

"$\supset$" : Soit $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ la i-ème équation de $(*)$.

on remplace x par $\vec{p} + \vec{v}_1 \lambda_1 + \vec{v}_2 \lambda_2 + \dots + \vec{v}_k \lambda_k$

on obtient $(a_{i1}\vec{p} + a_{i2}\vec{p} + \dots + a_{in}\vec{p}) + \lambda_1 (a_{i1}\vec{v}_1 + a_{i2}\vec{v}_2 + \dots + a_{in}\vec{v}_2) + \lambda_2 (a_{i1}\vec{v}_1 + a_{i2}\vec{v}_2 + \dots + a_{in}\vec{v}_2) + \dots + \lambda_k (a_{i1}\vec{v}_k + a_{i2}\vec{v}_k + \dots + a_{in}\vec{v}_k) = b_i + 0 + 0 + \dots + 0 = b_i$.

d'où $\{ \vec{p} + \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k, \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R} \} \subset S$.

"$\subset$". Soit x solution de $(*)$ et $\vec{p}$ une autre solution de $(*)$. alors $x - \vec{p}$ est solution de (H).

Exo 6.

Ex 6 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} -x - 4y - 2z = \alpha \\ x - 3y - z = \beta \\ 2x + 4y + z = \gamma \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & -2 & -\alpha \\ 1 & -3 & -1 & \beta \\ 2 & 4 & z & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 - 2L_1]{L_2 \mapsto L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -\alpha \\ 0 & -7 & -3 & \alpha + \beta \\ 0 & -4 & -3 & 2\alpha + \gamma \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{2\alpha + \gamma}{4} \\ 0 & -7 & -3 & \alpha + \beta \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 + 7L_2]{L_1 \mapsto L_1 - 4L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \alpha + \gamma \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{2\alpha + \gamma}{4} \\ 0 & 0 & \frac{9}{4} & \frac{-10\alpha + 4\beta - 7\gamma}{4} \end{array}\right).$$

alors on a

$$\begin{cases} z = \frac{-10\alpha + 4\beta - 7\gamma}{9} \\ y = \frac{-2\alpha - \gamma}{4} - \frac{3}{4}z = \frac{-2\alpha - \gamma}{4} - \frac{-10\alpha + 4\beta - 7\gamma}{12} = \frac{-6\alpha - 3\gamma + 10\alpha - 4\beta + 7\gamma}{12} = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{3} \\ x = \alpha + \gamma + z = \frac{9\alpha + 9\gamma - 10\alpha + 4\beta - 7\gamma}{9} = \frac{-\alpha + 4\beta + 2\gamma}{9} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-\alpha + 4\beta + 2\gamma}{9} \\ \frac{\alpha - \beta + \gamma}{3} \\ \frac{-10\alpha + 4\beta - 7\gamma}{9} \end{pmatrix} \right\}$$

Exercice 6.

(b): $$\begin{cases} -x + y + z = \alpha \\ y + 3z = \beta \\ x + z = \gamma \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \beta \\ 1 & 0 & 1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \mapsto -L_1]{L_3 \mapsto L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -\alpha \\ 0 & 1 & 3 & \beta \\ 0 & 1 & 2 & \gamma + \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 - L_2]{L_1 \mapsto L_1 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & \beta - \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \beta \\ 0 & 0 & -1 & \gamma + \alpha - \beta \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 - 3L_3]{L_1 \mapsto L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\beta + 2\alpha - 2\gamma \\ 0 & 1 & 0 & -2\beta - 3\gamma + 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma - \alpha + \beta \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} x = 2\alpha - \beta - 2\gamma \\ y = 3\alpha - 2\beta - 3\gamma \\ z = -\alpha + \beta + \gamma \end{cases}$$

(c): $$\begin{cases} x - y + 2z = \alpha \\ 3x - 2y + 3z = \beta \\ -x + y - z = \gamma \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \alpha \\ 3 & -2 & 3 & \beta \\ -1 & 1 & -1 & \gamma \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 - 3L_1]{L_3 \mapsto L_3 + L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & \alpha \\ 0 & \cancel{-1}\ 1 & -3 & \beta - 3\alpha \\ 0 & 0 & 1 & \gamma + \alpha \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 + 3L_3]{L_1 \mapsto L_1 - 2L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -\alpha - 2\gamma \\ 0 & \cancel{-1}\ 1 & 0 & \beta + 3\gamma \\ 0 & 0 & 1 & \gamma + \alpha \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} z = \gamma + \alpha \\ y = \beta + 3\gamma \\ x = -2\alpha + \gamma + \beta \end{cases}$$

bonus 1 $$\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + az = 7 \end{cases}$$ avec $a \in \mathbb{R}$. $$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & a & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 - 2L_1]{L_3 \mapsto L_3 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & a + 8 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 + 2L_2]{L_1 \mapsto L_1 - 5L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & a + 6 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} (a+6)z = 1 \Rightarrow a + 6 \neq 0 \quad (\text{i.e. } a \neq -6) \\ \quad \text{et } z = \frac{1}{a+6} \\ y = \frac{a+7}{a+6} \\ x = \frac{3}{2a+12} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

bonus 2 : $$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ ax - 2y + az = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ a & -2 & a & -1 \end{array}\right)$$ supposons $a \neq 0$ $$\xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 / a]{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{a} & 1 & -\frac{1}{a} \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 - L_1]{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2a+2}{a} & -1 & -\frac{1}{a} \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \mapsto L_1 - 2L_2]{L_3 \mapsto L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2+2a}{a} - \frac{5}{3} & 0 & -\frac{1}{a} - \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

$\Rightarrow a = 0$, alors $$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_2 \mapsto L_2 + L_1]{L_1 \mapsto L_1 - L_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \mapsto L_1 - 2L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -3 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (11a + 6)z = a + 3 \\ \Rightarrow 11a + 6 \neq 0 \ [illegible] \\ \text{et } z = \frac{a+3}{11a+6} \\ -\frac{5}{3}y + 3z = -\frac{1}{3} \\ \text{[illegible]} \end{cases}$$

Exo 6. (d): $$\begin{cases} x + y + z = a \\ jx + j^2 y + z = aj \\ j^2 x + jy + z = a \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ j & j^2 & 1 & aj \\ j^2 & j & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \mapsto L_3 - j^2 L_1]{L_2 \mapsto L_2 - jL_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & j(j-1) & 1-j & 0 \\ 0 & -j(j-1) & 1-j^2 & -j(j-1)a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \mapsto L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & j(j-1) & -(j-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(j-1)(j+2) & -j(j-1)a \end{array}\right)$$

Exo 6.

(c): $$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 2x - y - z + 3t = 0 \\ x - 2y + 2z - t = 1 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \mapsto L_4 - 2L_1]{\substack{L_2 \mapsto L_2 - 2L_1 \\ L_3 \mapsto L_3 - L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[L_1 \mapsto L_1 - \frac{1}{3}L_2]{\substack{L_3 \mapsto L_3 + L_2 \\ L_2 \mapsto \frac{1}{3}L_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \mapsto L_2 - L_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

et le système est donc équivalent à $$\begin{cases} x = -\frac{2}{3}t \\ y = -\frac{5}{12}t - \frac{1}{4} \\ z = \frac{3}{4}t + \frac{1}{4} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$ et l'ensemble des solutions est donc $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{12} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

Exer 6.

(b): $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y + 3z = 7 \\ 3x + 8y - 7z = 3 \end{cases}$

Exo 7. 3. $\begin{cases} 2x + 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ ax + 8y - 7z = 7 \end{cases} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ a & 8 & -7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 - \frac{7}{8}L_1]{L_2 \to L_2 - \frac{9}{8}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ \frac{7}{4} & -\frac{25}{8} & 0 & 0 \\ a - \frac{7}{4} & \frac{29}{8} & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 14 & -25 & 0 & 0 \\ 8a - 7 & 29 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 14 & -25 & 0 & 0 \\ 8a + 7 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \to L_3 + \frac{4}{25}L_2]{L_1 \to L_1 - \frac{1}{5}L_2,\ L_2 \to -\frac{1}{25}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{4}{5} & 0 & -8 & 8 \\ -\frac{14}{25} & 1 & 0 & 0 \\ 8a + 7 \cdot \frac{14}{25} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ a & 8 & -7 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 8 & -7 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - aL_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 8 - \frac{5}{2}a & -7 + 4a & 7 - 4a \end{array}\right)$

$\xrightarrow[L_3 \to L_3 - (8 - \frac{5}{2})L_2]{L_1 \to L_1 - \frac{5}{2}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{3}{2}a & -1 - \frac{3}{2}a \end{array}\right)$

si $1 + \frac{3}{2}a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$

et $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}.$

sinon $a \neq -\frac{2}{3}$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ et $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$