TDS.

Exo 4, (E): $(1+x^2)\,y'(x) = x\,y(x) + x$ pour $x \in I = \mathbb{R}$.

$(E) \Leftrightarrow y'(x) = \frac{x}{1+x^2}\,y(x) + \frac{x}{1+x^2}$.

Résolvant homogène associée : et $y'(x) = \frac{x}{1+x^2}\,y(x) \Rightarrow y(x) = C\sqrt{x^2+1}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

donc $(E) \Rightarrow y(x) = C(x)\sqrt{x^2+1}$ avec $C(x)$ dérivable sur I

$\Rightarrow y'(x) = C'(x)\sqrt{x^2+1} + C(x)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

d'où $(E) \Leftrightarrow C'(x)\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{1+x^2}$

$\Leftrightarrow C'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\Leftrightarrow C(x) = \int \frac{u'}{2}\,u^{-\frac{3}{2}}\,dx$ avec $u = 1+x^2$

$= \frac{1}{2} \times (-2) \times u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow y(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C\right)\sqrt{x^2+1}$ avec $C \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow y(x) = C\sqrt{x^2+1} - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Équation linéaire différentielle part 2.

Soit l'équation différentielle du second ordre linéaire à coefficient constant homogène suivante

$(*)$: $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $(b, c) \in \mathbb{R}$

On associe à $(*)$ une équation polynomiale de degré 2 caractéristique, à savoir l'équation vérifiée par la constante $r \in \mathbb{R}$ pour que $x \mapsto e^{rx}$ soit solution de $(*)$.

posons $y(x) = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{R}$. donc $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2 e^{rx}$

donc $(*) \Leftrightarrow r^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow r^2 + br + c = 0$ car $e^{rx} > 0$.

cas $\Delta > 0$; il existe 2 racines caractéristiques réelles distinctes r_1 et r_2

donc $x \mapsto e^{r_1 x}$ et $x \mapsto e^{r_2 x}$ sont solutions à $(*)$ sur $\mathbb{R}$.

donc les fonctions $x \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ sont solutions pour tout $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ par homogénéité.

(Or il s'agit des seules solutions.

En effet, on cherche $y(x)$ sous la forme $z(x)e^{r_1 x}$, alors $y'(x) = z'(x)e^{r_1 x} + r_1 z(x) e^{r_1 x}$

et $y''(x) = z''(x)e^{r_1 x} + z'(x)r_1 e^{r_1 x} + r_1 z'(x) e^{r_1 x} + z(x) r_1^2 e^{r_1 x}$.

$= z''(x)e^{r_1 x} + 2z'(x) r_1 e^{r_1 x} + z(x) r_1^2 e^{r_1 x}$.

si $y(x)$ solution à $(*)$, on a $e^{r_1 x}(z''(x) + z'(x)(2r_1 + b) + z(x)\underbrace{(r^2 + br_1 + c)}_{0}) = 0$

soit $z''(x) = -(2r_1 + b)z'(x) \Leftrightarrow z'(x) = Ce^{-(2r_1+b)x}$, $C \in \mathbb{R}$.

et donc $z(x) = C\frac{e^{-(2r_1+b)x}}{-(2r_1+b)} + A$ avec $A \in \mathbb{R}$.

ce qui donne $y(x) = e^{r_1 x}\left[A + \frac{C}{-(b+2r_1)}e^{-bx - 2r_1 x}\right]$ or $r^2 + br + c = (r - r_1)(r - r_2)$ donc $r_1 + r_2 = -b \Rightarrow b + 2r_1 = r_1 - r_2$

$= e^{r_1 x}A + \frac{C}{r_2 - r_1}e^{(r_2 - r_1)x}e^{r_1 x}$

$= Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ avec $B = \frac{C}{r_2 - r_1}$

cas $\Delta = 0$. les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (A + Bx)e^{r_0 x}$, où r_0 est racine caractéristique

et $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

de même chercher des solutions à $(*)$ de la forme $y(x) = z(x)e^{r_0 x}$, d'après le raisonnement ci-dessus.

y est solution à $(*)$ ssi $e^{r_1 x}(z''(x) + z'(x)\underbrace{(2r_0 + b)}_{0 \text{ car } r_0 = \frac{-b}{2}} + z(x)\underbrace{(r^2 + br_1 + c)}_{0}) = 0$

donc ssi $z''(x) = 0 \Leftrightarrow z'(x) = B \Leftrightarrow z(x) = Ax + B$.

cas $\Delta < 0$. il y a 2 racines complexes distinctes conjuguées def $= \frac{-b}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \alpha \pm i\omega$ avec $(\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^2$.

les solutions de $(*)$ sont les fonctions $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ où A et B sont des constantes réelles.

On cherche $y(x)e^{\alpha x} = z(x)$, y solution à $(*)$ ssi $e^{\alpha x}(z''(x) + z'(x)(2\alpha + b) + z(x)(\alpha^2 + b\alpha + c)) = 0$ avec $b + 2\alpha = b - b = 0$.

et $\alpha^2 + \alpha b + c = (\alpha + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + c = \frac{-\Delta}{4} = \omega^2$.

donc ssi $z''(x) + \omega^2 z(x) = 0$, ω est la pulsation, la période est $T = \frac{2\pi}{\omega}$ pour l'oscillateur harmonique.

or $A\cos\omega x + B\sin\omega x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega x\right)$

$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\cos\varphi\cos\omega x - \sin\varphi\sin\omega x\right)$

$= \sqrt{A^2+B^2}\cos\omega x + \varphi$

1) . $z(x) = \cos\omega x$ est solution, en effet $z'(x) = -\omega\sin\omega x$ et $z''(x) = -\omega^2\cos\omega x$

est solution de $z''(x) + \omega^2 z(x) = 0$

2). on cherche $z(x)$ sous la forme $u(x)\cos\omega x$. donc $z'(x) = u'(x)\cos\omega x - u(x)\sin\omega x$

et $z''(x) = u''(x)\cos\omega x - u'(x)\omega\sin\omega x + u'(x)(-\omega)\sin\omega x - \omega^2 u(x)\cos(\omega x)$

donc $z''(x) + \omega^2 z(x) = u''(x)\cos\omega x - 2\omega u'(x)\sin\omega x$ est solution.

equation associée est $u''(x) - 2\omega u'(x)\tan\omega x = 0 \Rightarrow u'(x) = Ce^{\int 2\omega\tan\omega x\,dx}$

or $2\omega\tan\omega x\,dx = 2\omega\frac{\sin\omega x}{\cos\omega x} = \frac{-2v'}{v}$ avec $v = \cos\omega x$

$= (-2\ln|\cos\omega x|) = \left(\ln\left|\frac{1}{-\cos^2\omega x}\right|\right)'$.

donc $u'(x) = C\frac{1}{-\cos^2 x}$ et ainsi $u(x) = C\int\frac{dx}{-\cos^2\omega x} = \frac{C}{\omega}\tan\omega x + A$

puis $z(x) = \cos\omega x\left(A + \frac{C}{\omega}\frac{\sin\omega x}{\cos\omega x}\right) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ avec $B = \frac{C}{\omega}$.

et finalement $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

remarque: $(*) : y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$ avec $b = 0$.

$\Delta = -4c$. cas $\Delta > 0$, on écrit $c = -|c| = -(\sqrt{|c|})^2 = -\omega^2$ avec $\omega = \frac{\sqrt{-4c}}{2}$.

et les racines caractéristiques sont $\pm\omega$.

et $(*) \Leftrightarrow y(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

or avec $e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$ et $e^{-t} = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t$

et donc $(*) \Leftrightarrow y(x) = (A+B)\operatorname{ch}\omega x + (A-B)\operatorname{sh}\omega x$

$= A'\operatorname{ch}\omega x + B'\operatorname{sh}\omega x$ avec $A' = A+B$ et $B' = (A-B)$.

cas $\Delta = 0 \Rightarrow c = 0$ et $(*) \Leftrightarrow y''(x) = 0$ et $y(x) = ax + b$

cas $\Delta < 0 \Rightarrow c > 0 \Leftrightarrow c = \omega^2$ et les solutions sont les $A\sin\omega x + B\cos\omega x$

$\pm\omega$ racines caractéristiques

TD5. Eq lin second ordre. part 2.

Exo 8 (a)(b)(d) $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0$, $\forall x \in I = \mathbb{R}$.

a: $y'' - 5y' + 6y = 0$.

l'eq polynomiale caractéristique est : $x^2 - 5x + 6 = 0$; $\Delta = 25 - 4\times 6 = 1 > 0$.

donc les solutions sont $x = \frac{1}{2}(5 \pm 1) =$

donc $x = 2$ ou $x = 3$.

Les solutions de (a) sont les fonctions $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(b) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

l'equation polynomiale caractéristique associée est :

$x^2 - 2x + 2 = 0$; $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2 < 0$.

donc les solutions sont le $x = 1 \pm i$ posons $\lambda = 1$ et $\omega = 1$ les parties réel et imaginaire

des solutions (au signe près de ω).

Les solutions sont donc les $y(x) = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$. avec $A, B \in \mathbb{R}$.

(d) $4y''(x) + 4y'(x) + y(x) = 0$

l'equation polynomiale caractéristique est $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$; $\Delta = 0$.

donc les solutions est $x = -\frac{1}{2}$

et celles de (d) sont les $y(x) = (A + Bx)e^{-\frac{1}{2}x}$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.

c). $y''(x) - 2y(x) = -1$, c'est une équation différentielle linéaire à coefficient constant non homogène

résolvons $y''(x) - 2y(x) = 0$; son équation polynomiale caractéristique est $x^2 - 2 = 0$ i.e. $x = \pm\sqrt{2}$.

donc les solutions sont les $y(x) = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x}$ avec $A, B, A', B' \in \mathbb{R}$.

$= A'\operatorname{sh}\sqrt{2}x + B'\operatorname{ch}\sqrt{2}x$

une solution particulière à (c) est $y(x) = \frac{1}{2}$, donc les solutions à (c) sont les $y(x) = A'\operatorname{sh}\sqrt{2}x + B'\operatorname{ch}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$ avec $A', B' \in \mathbb{R}$

Exo 9. d). donner une équation linéaire d'ordre 2 vérifiée

• par $\text{ch}\,3x$ et $\text{sh}\,3x$.

on peut alors supposer que les solutions sont les $f(x) = Ae^{3x} - Be^{-3x}$

donc l'équation polynomiale associée à l'équation est $x^2 - 9 = 0$.

d'où l'équation $y''(x) - 9y(x) = 0$.

• par $\cos 3x$ et $\sin 3x$

on peut supposer l'ensemble des solutions sont les $y(x) = e^{0x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

donc l'équation polynomiale associée à l'équation est $x^2 + 9 = 0$

d'où l'équation $y''(x) + 9y(x) = 0$.

• par e^{2x} et e^{-x}

· $y(x) = e^{2x} \Rightarrow y'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow y''(x) = 4e^{2x}$.

autre solution : le cours est plus rapide

donc $y''(x) + by'(x) + cy(x) = (4 + 2b + c)e^{2x}$.

et $y(x) = e^{-x} \Rightarrow y'(x) = -e^{-x} \Rightarrow y''(x) = e^{-x}$

donc $y''(x) + by'(x) + cy(x) = (1 - b + c)e^{-x}$.

il reste donc $\begin{cases} 4 + 2b + c = 0 \\ 1 - b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 3b = 0 \\ 6 + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = -2 \end{cases}$

d'où l'équation $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$.

Exo 2.

donner une équation ayant pour solution $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

f est dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{e^x+1} f(x).$$

donc f est solution de $(e^x+1) f'(x) - f(x) = 0$.

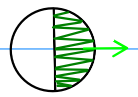
TD 6 - (réciproque des fonct. trigonométriques circulaires)

- $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \quad \forall x \in [-1;1]$.
- $\arctan x$ défini sur $\mathbb{R}$.

TD 7 (primitive fonct. usuelles).

Ch 6. fonctions trigonométriques circulaires réciproques.

1. $f = \arcsin$. $\quad \mathcal{D}_f = [-1;1]$.



définition : $\forall y \in [-1;1]$, $\arcsin y = \theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin\theta = y$.

arcsin est impaire car $\sin \circ \arcsin$ est impaire et sin impaire.

de plus, $\arcsin 0 = 0$ car impaire ; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ donc $\arcsin -1 = -\frac{\pi}{2}$

	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	+	
g = sin	-1 ↗	1

De plus, elle est continue sur $\mathcal{D}_f$ et dérivable sur $]-1;1[$.

$g = \sin$. f est la fonct. réciproque de g donc

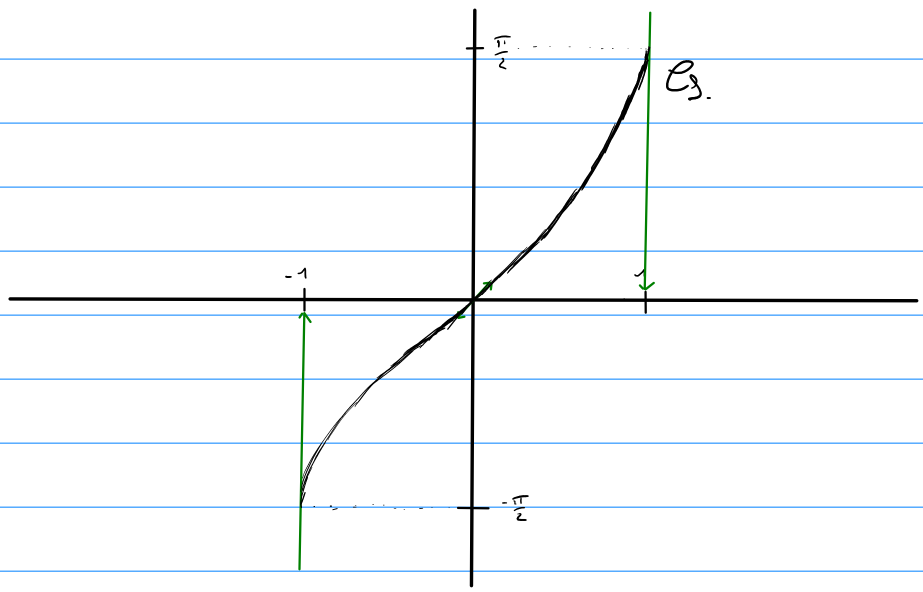
$\forall y \in]-1;1[$, $f'(y) = \frac{1}{g'(f(y))} = \frac{1}{\cos f(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 f(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = +\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale

au passage dit $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \arcsin y + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

au point d'abscisse $x_0 = 1$. (resp. pour $x_0 = -1$ par imparité).

enfin $f'(0) = 1$ donc $y = x$ est tangente au point d'abscisse 0.

Courbe représentation :



exo 4.

a. $\sin(\arcsin x) = x$. pour tout $x \in [-1;1]$.

b. $\arcsin(\sin(x)) = \theta$ tel que $\theta \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et $\sin(x) = \sin\theta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonct $\arcsin(\sin x)$ est impaire et 2π-périodique, et $\forall x \in$

Autre méthode

soit $h(x) = \arcsin(\sin x)$. on a $\sin(h(x)) = \sin x$ et $h(x) \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. et on introduit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = n\pi + r$ avec $r \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Alors $\sin x = \sin(n\pi + r) = (-1)^n \sin r = \sin((-1)^n r)$ par parité. et $(-1)^n r \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. donc $h(x) = (-1)^n (x - n\pi)$

exo 5.

e. Soit $x \in]-1,1[$, $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\cos \arcsin x} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Une application au calcul de primitive.

$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}}$ dans le cas où $\Delta = b^2+4c > 0$.

$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4}+c-(x-\frac{b}{2})^2}}$ avec $\frac{b^2}{4}+c = \frac{\Delta}{4}$

$F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\Delta}}{2})^2-(x-\frac{b}{2})^2}}$ et on introduit u tq $x - \frac{b}{2} = u\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ càd $u = \frac{2x-b}{\sqrt{\Delta}}$ avec $u' = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}$ ou $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}u' = 1$.

alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\Delta}}{2})^2-(x-\frac{b}{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\Delta}}{2})^2-(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}u)^2}}\frac{\sqrt{\Delta}}{2}u' = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}u'}{\sqrt{(\frac{\sqrt{\Delta}}{2})^2}\sqrt{1-u^2}} = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

ainsi $f(x) = \frac{d}{dx}\arcsin u$.

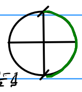
et donc $F(x) = \arcsin\left(\frac{2x-b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

TD6. exo1. a. $\arcsin(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}) = -\frac{\pi}{4}$; b. $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$; h. $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$.

exo2. a. $\sin(\arcsin(\frac{1}{3})) = \frac{1}{3}$; b. $\arcsin(\sin(\frac{2\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$; c. $\arcsin(\sin(\frac{5\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$.

exo3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tq $-1 \leq x \leq 1$

1.



sin est strictement croissante sur $[-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}]$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur $\alpha \in [-\frac{5\pi}{2};-\frac{3\pi}{2}]$ tq $\sin\alpha = x$ est unique pour tout $x \in [-1;1]$.

de plus sin étant 2π-périodique de réciproque arcsin sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, donc $\alpha = \arcsin(x) - 2\pi$.

2.

$$(*) \iff \begin{cases} \sin\alpha = x \\ \alpha \in [\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}] \end{cases}$$

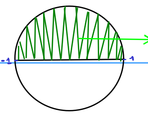
or $(*) \Rightarrow \sin\alpha = x \iff \alpha \equiv \arcsin x\ [2\pi]$ ou $\alpha \equiv \pi - \arcsin x\ [2\pi]$

$\iff \alpha = \arcsin x + 2n\pi \in [(4n-1)\frac{\pi}{2};(4n+1)\frac{\pi}{2}]$ ou $\alpha = \pi - \arcsin x + 2n\pi \in [(4n+1)\frac{\pi}{2};(4n+3)\frac{\pi}{2}]$. avec $n \in \mathbb{Z}$.

d'une part $4n-1 = 5$ et $4n+1 = 7$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$

en revanche $4n+1 = 5$ et $4n+3 = 7$ admet $n = 1$ pour unique solution.

donc $(*) \iff \alpha = 3\pi - \arcsin x$

2. $f = \arccos$. $\mathcal{D}_f = [-1 ; 1]$ 

$\forall y \in \mathcal{D}_f$, $f(y) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(y)$.

et $f(y) := x$ tq $x \in [0 ; \pi]$ et $\cos x = y$.

en effet, si $\varphi = \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \theta$.

on a $\sin\theta = x$ avec $\theta \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$. $\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = x$ et $\frac{\pi}{2} - \varphi \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$.

$\Leftrightarrow \cos\varphi = x$ et $\varphi \in [\pi ; 0]$.

on a $\forall x \in [-1, 1]$, $f(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin -x = \frac{\pi}{2} + \arcsin = \pi - f(x)$.

donc le point $\binom{0}{\frac{\pi}{2}}$ est centre de symétrie à $\mathcal{C}_f$.

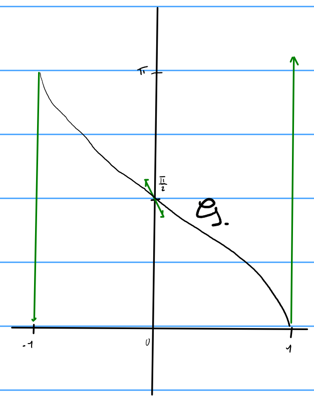
et $\forall x \in [-1 ; 1]$, $f'(x) = (\frac{\pi}{2} - \arcsin x)'(x) = -(\arcsin x)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

x	-1		1
f'		$-$	
f	π	$\searrow$	0

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et on $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$ par symétrie. et $f(0) = \frac{\pi}{2}$ car symétrie.

et $f(1) = 0$ et $f(-1) = \pi$ par symétrie, donc f admet des tangentes verticales en ± 1. la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 0$ est $y = \frac{\pi}{2}$.

courbe représentative



application au calcul de primitives:

Calculons $\int f(x)$ où $f(x) = -\frac{1}{|\cos x|\sqrt{\cos 2x}}$ pour $I =]-\frac{\pi}{4} + n\pi , \frac{\pi}{4} + n\pi[$.

en effet. $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0$ et $\cos 2x > 0\}$.

or $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ et $\cos 2x > 0 \Leftrightarrow 2x \in]-\frac{\pi}{2} + 2n\pi ; \frac{\pi}{2} + 2n\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{4} + n\pi ; \frac{\pi}{4} + n\pi[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

comme $\forall n \in \mathbb{Z}, \nexists m \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{\pi}{2} + n\pi \in]-\frac{\pi}{4} + m\pi , \frac{\pi}{4} + m\pi[$.

nous pouvons étudier f sur I.

de plus, comme $\forall x \in I$, $|\cos x + \pi| = |-\cos x| = |\cos x|$. f est π-périodique..

On effectue le changement de variable suivant : $u = \tan x$ (car $\tan x$ π-périodique).

d'une part, $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1+u^2}$. d'autre part $\cos 2x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

ce qui donne $f(x) = -\sqrt{1+u^2}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}}} = -\frac{1+u^2}{\sqrt{1-u^2}}$

donc $\int f(x)\,dx = \int -\frac{1+u^2}{\sqrt{1-u^2}} \frac{dx}{du}\,du$

$= \int \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$ car $\frac{du}{dx} = 1+u^2$.

$= \arccos(\tan x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

---

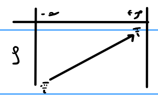
3. $f = \arctan$.

$f(x) = \arctan x$ est la bijection réciproque de $g :]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \tan\theta$

Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan x$ est le réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ tq $\tan\theta = x$.

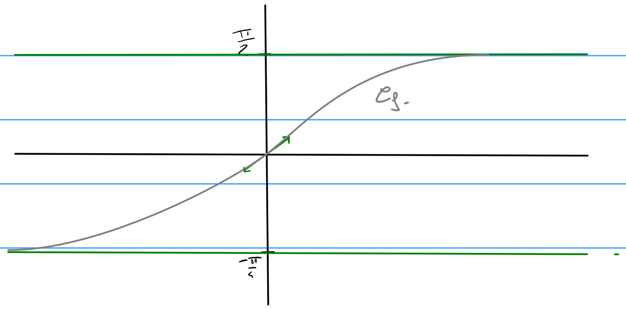
Arctan est impaire : si $x = \tan\theta$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ alors $-x = \tan -\theta$.

de plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{g' \circ f(x)} = \frac{1}{1+x^2} > 0$



d'où le tableau de variation de f:

courbe représentative.



Application au calcul de primitive.

Calculons $F(x) = \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$ lorsque b et c sont réels et $\Delta = b^2 - 4c < 0$.

Alors x^2+bx+c n'a pas de racine réelle. donc $f(x) = \frac{1}{x^2+bx+c}$ est continue dans $I = \mathbb{R}$.

or $x^2+bx+c = (x+\frac{b}{2})^2 - \frac{\Delta}{4}$.

donc $f(x) = \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{4})^2}$. (on fait le facteur par $(\frac{\sqrt{-\Delta}}{4})^2$, posons $x + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}u \iff u = \frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}$

alors $f(x) = \frac{1}{(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}u)^2 + (\frac{\sqrt{-\Delta}}{2})^2} = \frac{4}{-\Delta} \frac{1}{1+u^2} \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} u'$ avec $u' = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \iff \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} u' = 1$.

ainsi $\int f(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan u + C = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

TD6.

exo 1.

b. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$; d. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

exo 2.

d. $\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$.

exo 4.

c. $f(x) = \cos(\arccos x) = x$ est défini pour tout $x \in [-1, 1]$.

d. $f(x) = \arccos(\cos x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.

soit $x = n\pi + r$, $(n, r) \in \mathbb{Z} \times [0, \pi]$. i.e. $x - n\pi \in [0, \pi]$ i.e. $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

on a $f(x) = \arccos((-1)^n \cos(x - n\pi))$.

donc $\forall x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $f(x) = \begin{cases} \pi - x + n\pi & \text{si } 2 \nmid n \\ x - n\pi & \text{si } 2 \mid n. \end{cases}$

$= (-1)^n(x - n\pi) + \frac{\pi}{2}(1 + (-1)^{n+1})$.

Autre méthode : $f'(x) = (\arccos u)\frac{d}{dx} = -\frac{u'}{\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ avec $\sin x \neq 0$ i.e. $x \neq n\pi$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On écrit $x = n\pi + r$ avec $r \in]0, \pi[$, alors $\sin x = (-1)^n \sin r$.

avec $\sin r > 0$, on a $|\sin x| = \sin r$.

donc $f(x) = \int f'(x)dx = \int (-1)^n \frac{\sin r}{\sin r} dx = (-1)^n(x - n\pi) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. pour $x \in]n\pi ; (n+1)\pi[$ et $n \in \mathbb{Z}$.

or $\lim_{x \to n\pi} f(x) = \arccos(\cos(n\pi)) = \frac{\pi}{2}(1 + (-1)^{n+1})$.

d'où $C = \frac{\pi}{2}(1 + (-1)^{n+1})$ et $f(x)$ devient $(-1)^n(x - n\pi) + \frac{\pi}{2}(1 + (-1)^{n+1})$ pour tout $x \in [n\pi ; (n+1)\pi]$ et $n \in \mathbb{Z}$.

car $\sin(\arccos x) > 0$.

exo 8. c. Sur $x \in [-1, 0[\cup]0, 1]$. $\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$.

exo 11. b.

$x \in [-1, 1]$ $F(x) = \int \arccos x \, dx = x \arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

or $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1+x^2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. d'où $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

exo 11. c. Sur $x \in [-1, 1]$, $F(x) = \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

avec $C \in \mathbb{R}$

exo 7. h.

$h(x) = \arccos(\tan x)$. $\mathcal{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan x \text{ est défini et } -1 \leq \tan x \leq 1\}$.

On écrit $x = n\pi + r$ avec $r \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$. $r = -\frac{\pi}{2}$ ou $r = \frac{\pi}{2}$ i.e. $\tan x$ non défini

de plus, comme $\forall x = n\pi + r$, $(r, n) \in \mathbb{Z} \times]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\tan x = \tan r$ est périodique.

$\tan x$ croissant sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, on a $-1 \leq \tan x \leq 1$ i.e. $-\frac{\pi}{4} \leq r \leq \frac{\pi}{4}$

d'où $x \in [n\pi - \frac{\pi}{4} ; n\pi + \frac{\pi}{4}]$ et $\mathcal{D}_h$ est l'union de ces intervalles.

et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, h est dérivable tel que $h'(x) = -(1+\tan^2 x)\dfrac{1}{\sqrt{1-\tan^2 x}} =$

changement de variable avec M. c. soit $f(x) = \theta$ avec $x = \sin\theta$ donc $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$.

$F(x) = \int \theta\, dx = \int \theta \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int \theta\cos\theta\, d\theta = \theta\sin\theta + \cos\theta + \text{Constante}$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

Exo 4. 8.

$f : x \mapsto \arctan(\tan x)$ est défini sur l'ensemble des intervalles $]-\frac{\pi}{2}+n\pi ; \frac{\pi}{2}+n\pi[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}+n\pi ; \frac{\pi}{2}+n\pi[$ où $n \in \mathbb{Z}$.

on a bien $x - n\pi \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. et comme $\tan x$ est π-périodique.

$f(x) = \arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x-n\pi)) = x - n\pi$

Exo 5. a.

a. $\arctan x = \theta$ vérifie $\tan\theta = x$. et $\theta \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

or $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + x^2$. donc $\dfrac{1}{|\cos\theta|} = \sqrt{1+x^2}$.

comme $\theta \in [-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ $\cos\theta > 0$ et $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

b. $\sin\theta = (\tan\theta)\cos\theta \Leftrightarrow \sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exo 13. (ii). Exo 14. (iii) (ii).

Mq. pour $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. tq $ab < 1$, $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

$\theta = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ est défini pour $ab \neq 1$ et θ vérifie $\tan\theta = \frac{a+b}{1-ab}$.

pour $\alpha = \arctan a$ et $\beta = \arctan b$ on a $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$

$= \dfrac{(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta))/(\cos\alpha\cos\beta)}{(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta))/(\cos(\alpha)\cos\beta)}$

$= \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{a+b}{1-ab}$.

Donc $\tan(\arctan a + \arctan b) = \dfrac{a+b}{1-ab} \Leftrightarrow \arctan a + \arctan b = \theta + n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

Mq. $ab < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \arctan a + \arctan b < \frac{\pi}{2}$.

si $a > 0$ alors $\arctan a > \arctan 0 \Rightarrow \arctan a > 0$ et $\arctan b > -\frac{\pi}{2}$. donc $\arctan a + \arctan b > -\frac{\pi}{2}$.

d'autre part $ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$ car $a > 0$ donc $\arctan b < \arctan\frac{1}{a} \Rightarrow \arctan a + \arctan b < \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

si $a < 0$, $ab < 1 \Rightarrow$ donc $-a > 0$ et $-b > 0$, alors $\arctan -a + \arctan -b = \arctan -\frac{a+b}{1-ab} \Leftrightarrow \arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}$.

Exo 11.

$f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

$D_f =]-1 ; 1]$.

posons $x = \cos\varphi$ où $\varphi \in [0, \pi[$ et on calcule $\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = (\tan\frac{\varphi}{2})^2$

avec $\cos\varphi = \cos 2\frac{\varphi}{2} = (\cos\frac{\varphi}{2})^2 - (\sin\frac{\varphi}{2})^2 = (\cos\frac{\varphi}{2})^2 - (1-\cos^2\frac{\varphi}{2}) = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$
$= 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

or $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = |\tan\frac{\varphi}{2}|$

$= \tan\frac{\varphi}{2}$. car $\varphi \in [0, \pi[\Rightarrow \frac{\varphi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \tan\frac{\varphi}{2} \geq 0$

donc $\forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f \circ \cos\varphi = \frac{\varphi}{2}$ avec φ vérifiant $\cos\varphi = x$ $\forall x \in [-1, 1[$.

donc $f(x) = \frac{1}{2}(\arccos x) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$.

d'où $f(x) + \frac{1}{2}\arcsin x = \frac{\pi}{4}$.

Exo 12. $(*) : (1+x^2)y'(x) + 2y(x) = 3 \iff y'(x) = -\frac{2}{1+x^2}y(x) + \frac{3}{1+x^2}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

$(*)$ est une équation différentielle d'ordre 1 avec second membre.

L'équation homogène associée à $(*)$ est $y'(x) = -\frac{2}{1+x^2}y(x) \iff y(x) = Ce^{-2\arctan x}$ avec $-\frac{2}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}$.

donc $(*) \Rightarrow y(x) = C(x)e^{-2\arctan x}$ avec $C(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow y'(x) = C'(x)e^{-2\arctan x} - \frac{2}{1+x^2}y(x)$

donc $(*) \iff C'(x)e^{-2\arctan x} = \frac{3}{1+x^2}$

$\iff C'(x) = 3e^{2\arctan x}/1+x^2$.

$\iff C(x) = 3\int \frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2}dx$

$\iff C(x) = 3\int e^{2\theta}d\theta$ avec $\theta = \arctan x$

$\iff C(x) = \frac{3}{2}e^{2\theta} + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

on a donc $(*) \iff y(x) = c\,e^{-2\arctan x} + \frac{3}{2}$. $\forall x \in \mathbb{R}$

Exo 5. c. $f(x) = \dfrac{5 + 3x + 7x^2}{1 + x^2}$

$$\begin{array}{l|l} 7x^2 + 3x + 5 & 1+x^2 \\ \hline 3x - 2 & 7 \end{array}$$

d'où $f(x) = 7 + \dfrac{3x}{1+x^2} - \dfrac{2}{1+x^2}$.

d'où $\int f(x)dx = 7x + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx - 2 \arctan x$.

$= 7x + \frac{3}{2}\ln(1+x^2) - 2\arctan x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

pour $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + 5x + 5 & x^2 + 2x + 1 \\ \hline x^2 + 4x + 5 & x + 1 \\ 2x + 4 & \end{array}$$

d'où $g(x) = x + 1 + \dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$

Exo 8. c. Etudier la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ et } \frac{1+x}{1-x} \in [-1, 1]\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*$, on $\frac{1+x}{1-x} = u$.

$u \in [-1, 1] \iff u + 1 \geq 0$ et $u - 1 \leq 0$

$\iff \frac{2x}{1-x} \leq 0$ et $\frac{2}{1-x} \geq 0$.

$\iff x < 1$ et $x \leq 0$

$\iff x \leq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}_-$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*_-$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$, $f'(x) = (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ est du signe de u' avec $u = \frac{1+x}{1-x}$

or $u' = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$ donc $f'(x) > 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \arcsin x = -\frac{\pi}{2}$.

et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = +\infty$

TD 7 : primitives et intégrales (partie 2).

Exo 2. (a)(b)(c)

(a). $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \int \left(\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}\right)dx$ avec (a, b) solution de $(x+2)a + (x-1)b = 1 \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b - 4a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a \\ a = -\frac{1}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$

$= -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

b) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{du}{u}$ avec $u = (x-1)(x+2)$ donc $u' = 2x+1$

$= \ln|(x-1)(x+2)| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

c) $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx = \int \frac{u' - 1}{2u}dx$ avec $u = 2x^2 + 3x - 2$ donc $u' = 4x + 3 \Rightarrow \frac{u'}{2} = 2x + \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2}\ln|2x^2+3x-2| - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+3x-2}$ or $2x^2 + 3x - 2 = 0 \iff x = \frac{1}{4}(-3 \pm 5)$ car $\Delta = 9 + 16 = 25 = 5^2$

$\iff x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{2x^2+3x-2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-\frac{1}{2}}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On cherche avec solution de $a(x - \frac{1}{2}) + b(x+2) = 1 \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - \frac{a}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a \\ 5b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{2}{5} \\ a = -\frac{2}{5} \end{cases}$.

donc $\int \frac{2x+1}{2x^2+3x-2}dx = \frac{1}{2}\ln|2x^2+3x-2| + \frac{1}{5}\ln|x+2| - \frac{1}{5}\ln|x - \frac{1}{2}| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

⚠ il aurait été plus simple de décomposer $\frac{2x+1}{2x^2+3x-2} = \frac{3}{5}\frac{1}{x+2} + \frac{2}{5}\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$ (cela évite de faire remonter et simplifier encore, car $\Delta > 0$).

$g(x) = \int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx = 2\int \frac{du}{u}$ avec $u = x^2-2x+2$ et $u' = 2x-2$

$= 2\ln(x^2-2x+2) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ $\quad D_f : \mathbb{R}$.

$h(x) = \int \frac{x-5}{x^2-2x+2}$ pour $u = x^2-2x+2$, $u' = 2x-2$ donc $\frac{u'-8}{2} = x-5$.

$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - 4\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$

or $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{du}{1+u^2}$ avec $u = x-1$

$= \arctan(u) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

donc $h(x) = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| - 4\arctan(x-1) + C$.

i). $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x+1}$, $x^2+x+1=0$ n'a pas de solution ($\Delta < 0$)

en posant $u = x^2+x+1$, $u' = 2x+1$, et $\frac{u'+5}{2} = x+3$.

d'où $f(x) = \frac{1}{2}\frac{u'}{u} + \frac{5}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$.

d'où $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

or $\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}$ pour $w = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc $w' = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $\frac{w'\sqrt{3}}{2} = 1$.

d'où $\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Finalement $\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{5\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

(j, k, l). $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2+bx+c}}$; $\Delta > 0$ car sinon, $f(x)$ n'est pas déf.

soit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tq $(x-r_1)(x-r_2) = -x^2+bx+c$

et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ tq $-x^2+bx+c = (x-\alpha)^2+\beta$

exemple $k(x) = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ $\quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R} \mid 4-x^2 > 0\} = [-2;2]$.

$= \int \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\,dx = \int \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}$ avec $r = \frac{x}{2}$ donc $r' = \frac{1}{2}$.

$= \operatorname{arsh}\frac{x}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

et $l(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ or $-x^2-2x+3 = 0$ avec $\Delta = 4+12 = 4^2$ équivaut à $x=-3$ ou $x=1$ donc $\frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ défini sur $]-3;1[$.

$= \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \int \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x+1}{2})^2}}$ pour $r = \frac{x+1}{2}$, donc $r' = \frac{1}{2}$

$= \int \frac{dr}{\sqrt{1-r^2}} = \arcsin r + C = \arcsin\frac{x+1}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. $\forall x \in [-3;1]$ on arrive à calculer en -1 et 1.

Exo 4.

a). $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2}}$

$= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ avec $t = \frac{2x}{\sqrt{3}}$ donc $t' = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{1}{2} \int_{t=0}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \left[\arcsin t\right]_{t=0}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = \frac{\pi}{12}$

$J = \int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2+t+1} dt = \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+t+1}$ avec $v = t^2+t+1$, $v' = 2t+1$.

$= \left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$

$= \left[\ln(t^2+t+1)\right]_0^1 - \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$

$= \ln(3) - 0 - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}$

$= \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

exo 2. a) $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$ $\quad -2x^2-3x+2=0$, $\Delta = 5^2$, $x = \frac{3 \pm 5}{-4}$ donc $x=-2$ ou $x = \frac{1}{2}$. d'où $\mathcal{D}_g = \left]-2 ; \frac{1}{2}\right[$ et g est cont sur $\mathcal{D}_g$.

on écrit $g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{w}}$ où $w = -2x^2-3x+2$ donc $w' = -4x-3 \iff -\frac{w'+3}{4} = x$.

d'où $\int g(x)dx = \int \frac{2\left(-\frac{1}{4}\right)(w'+3)+1}{\sqrt{w}} dx = -\frac{1}{2}\int \frac{w'}{\sqrt{w}} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2(1-x^2-\frac{3}{2}x+1)}}$

$= -\sqrt{w} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+\frac{3}{4})^2 + \frac{25}{16}}}$

or $\int \frac{dx}{\sqrt{-(x+\frac{3}{4})^2 + \frac{25}{16}}} = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right)^2}} = \arcsin\left(\frac{x+\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right) + C = \arcsin\left(\frac{4x+3}{5}\right) + C$.

cas général. $f(x) = \frac{x+\mu}{x^2+bx+c}$ $\quad \Delta = b^2-4c < 0$.

Soit $f(x) = \frac{\frac{w'-b}{2}+\mu}{w}$ avec $w = x^2+bx+c$.

$= \left(\frac{1}{2}\ln|w|\right)' + \left(\mu - \frac{b}{2}\right) \frac{1}{(x+\frac{b}{2})^2 + \frac{(-\Delta)}{4}}$ on pose $x + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t$ avec $1 = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\frac{dt}{dx}$.

$= \left(\frac{1}{2}\ln|w|\right)' + \left(\mu - \frac{b}{2}\right) \frac{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\frac{dt}{dx}}{\frac{-\Delta}{4}(t^2+1)}$

donc $\int f(x)dx = \frac{1}{2}\ln|w| + \left(\mu - \frac{b}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{2\mu - b}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

cas $\Delta > 0$. soit r_1 et r_2 les racines de x^2+bx+c et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{r_1, r_2\}$. I un intervalle $\subset \mathcal{D}_g$.

$f(x) = \frac{x+\mu}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{\alpha}{x-r_1} + \frac{\beta}{x-r_2}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

or $\frac{\alpha}{x-r_1} + \frac{\beta}{x-r_2} = \frac{\alpha x - \alpha r_2 + \beta x - \beta r_1}{(x-r_1)(x-r_2)}$

donc $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha r_2 + \beta r_1 = -\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha r_2 - \alpha r_1 = r_1 - \mu \\ \beta r_1 - \beta r_2 = r_2 - \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \frac{r_1 - \mu}{r_2 - r_1} \\ \beta = \frac{r_2 - \mu}{r_1 - r_2} \end{cases}$.

et $F(x) = \int g(x)dx = \alpha \ln|x-r_1| + \beta \ln|x-r_2| + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{x+\mu}{\sqrt{-x^2+bx+c}}$ avec $\Delta = b^2+4c > 0$ et $\mathcal{D} =]r_1, r_2[$.

pour $f(x) = \frac{\frac{b-w'}{2}+\mu}{\sqrt{w}}$ avec $w = -x^2+bx+c$ et $w' = -2x+b$.

donc $f(x) = -\frac{w'}{2\sqrt{w}} + \left(\mu+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{\Delta}{4}-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}}$ et on pose $x-\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}t$ et $1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\frac{dt}{dx}$

$$= -(\sqrt{w})' + \left(\mu+\frac{b}{2}\right)\frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\frac{dt}{dx}}{\sqrt{\frac{\Delta}{4}(1-t^2)}}$$

et $F(x) = \int f(x)dx = -\sqrt{w} + \left(\mu+\frac{b}{2}\right)\arcsin t + C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

$$= -\sqrt{-x^2+bx+c} + \left(\mu+\frac{b}{2}\right)\arcsin\left(\frac{2x-b}{\sqrt{\Delta}}\right) + C.$$

Ex 1. $F(x) = \int f(x)dx$ et $f(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ $\mathcal{D}_f =]-1;1[$.

$$= \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$ car on a $f(x) = (1+x^2-x^2)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$.

et $F(x) = \arcsin(x) + \int \underbrace{x}_{u}\times\underbrace{x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx}_{v'}$ car on a $u'=1$ et $v = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

donc $\int uv'dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + C$

donc $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$.

Autre méthode, on pose $x = \sin\theta$ avec $\theta = \arcsin x$

donc $\int f(x)dx = \int f(\sin\theta)\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int f(\sin\theta)\cos\theta\, d\theta = \int(1-\sin^2\theta)^{-\frac{3}{2}}\cos\theta\, d\theta = \int(\cos^2\theta)^{-\frac{3}{2}}\cos\theta\, d\theta = \int\cos^{-2}\theta\, d\theta = \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$ avec $C\in\mathbb{R}$.

ii). $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (dans le cours).

pour $x = \sin\theta$, donc $\theta = \arcsin x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$f(x) = \cos\theta$. et $\int f(x)dx = \int f(\sin\theta)\frac{dx}{d\theta}d\theta = \int\cos^2\theta\, d\theta = \int\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\right)d\theta$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C.$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{4} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$$

avec $C\in\mathbb{R}$.

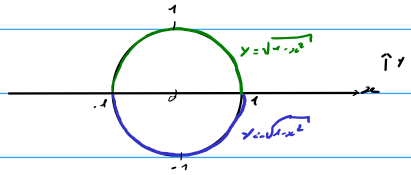
autre méthode IPP. $u = \sqrt{1-x^2}$ et $u' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v' = 1$ et $v = x$ pour $x\in]-1;1[$.

donc $F(x) = x\sqrt{1-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ et on sait que $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (-F(x))' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

donc $F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right) + C$ avec $C\in\mathbb{R}$

appliquer, calculer l'aire du disque unité $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$.

or $x^2+y^2 \leq 1 \iff |y| \leq \sqrt{1-x^2} \iff -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ et $-1 \leq x \leq 1$.



donc l'aire de D est égale à $I = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

donc $I = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ car $\sqrt{1-x^2}$ paire.

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{\arcsin x}{2}\right]_0^1$$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-1} + \frac{1}{2}\arcsin 1\right)$$

$$= 2\arcsin 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$ (mais non !?!).

Exo 3.

$$(E):\quad \mathrm{th}(t)y' + \frac{1}{2}y = \frac{(\mathrm{sh}(t)+1)\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}{(\mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}(t))} \quad \text{où } t\in\,]0;+\infty[.$$

l'équation homogène associée à (E) est $(H): \mathrm{th}(t)y' + \frac{1}{2}y = 0$

$(H) \iff y' = -\frac{1}{2\,\mathrm{th}(t)}\, y.$ car $\mathrm{th}(t) \neq 0$ sur $]0;+\infty[$.

$\iff y = Ce^{F(t)}$ où $F(t) = \int \frac{dt}{-2\,\mathrm{th}(t)}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)}\,dt$$ posons $u=\mathrm{sh}(t)$ donc $u'=\mathrm{ch}(t)$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|\mathrm{sh}(t)| + C$$

$= -\frac{1}{2}\ln \mathrm{sh}(t) + C$ car $\mathrm{sh}\, t > 0$ $\forall t \in\,]0;+\infty[$.

d'où $(H) \iff y = Ce^{-\frac{1}{2}\ln \mathrm{sh}(t)} = \frac{C}{\sqrt{\mathrm{sh}\, t}}$ avec $C\in\mathbb{R}$.

alors $(E) \Rightarrow y = \frac{C(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}\, t}}$ où $C(t)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\Rightarrow y' = C'(t)\frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t}} + C(t)\frac{-\mathrm{ch}\,t}{2\,\mathrm{sh}\,t}$$

$$\iff C'(t)\frac{\mathrm{th}(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t}} = \frac{(\mathrm{sh}(t)+1)\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}{\mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}(t)}$$

$$\iff C'(t)\,\mathrm{th}(t) = \frac{(\mathrm{sh}\,t+1)\,\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}(t)}$$

$$\iff C'(x) = \frac{(\mathrm{sh}\,t+1)\,\mathrm{sh}(t)}{(\mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}(t))\,\mathrm{th}(t)} = \frac{(\mathrm{sh}\,t+1)\,\mathrm{sh}(t)}{(\mathrm{sh}^2 t+\mathrm{sh}\,t+1)\,\mathrm{th}(t)}$$

$$\iff C(t) = \int \frac{(\mathrm{sh}^2 t + \mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}^3 t + \mathrm{sh}^2 t + \mathrm{sh}\,t}\,dt = \int \frac{(\mathrm{sh}\,t+1)\,\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{sh}^2 t + \mathrm{sh}\,t + 1}\,dt$$ posons $u=\mathrm{sh}\,t$, donc $u'=\mathrm{ch}\,t$.

$$= \int \frac{u+1}{u^2+u+1}\,du.$$ posons $v = u^2+u+1 > 0$; $v' = 2u+1 \iff u = \frac{v'-1}{2}$.

$$= \frac{1}{2}\ln v + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+u+1}$$

or $\int \frac{dv}{v^2+v+1} = \int \frac{dv}{(v+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dv}{(\frac{2}{\sqrt{3}}v+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$ posons $w = \frac{2}{\sqrt{3}}v + \frac{1}{\sqrt{3}}$, $w' = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{dw}{w^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan w + C.$$

d'où $C(t) = \frac{1}{2}\ln(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh} t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sh} t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

et $y = \frac{C}{\sqrt{\operatorname{sh} t}} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}\left(\frac{1}{2}\ln(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{sh} t + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sh} t + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Exo 6.

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ en exprimant $\sin x + \cos x = \alpha \sin x + \beta \cos x = \overbrace{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}^{\text{Amplitude}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos x + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin x\right)$.

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$.

$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x + \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)$.

d'où $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})} dx$. et on pose $y = x + \frac{\pi}{4}$, $dy = dx$. $= \sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$.

et $x = y - \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin(y-\frac{\pi}{4})}{\sin(y)} dy.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos\frac{\pi}{4}\sin y - \sin\frac{\pi}{4}\cos y}{\sin(y)} dy.$$

$$= \frac{1}{2}\Big[y - \ln|\sin y|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{2}\Big[y - \ln(\sin y)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi}{8} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{8} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

autre méthode, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$, on pose $y = \frac{\pi}{2} - x$, alors $I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos y}{\cos y + \sin y} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \frac{\sin y}{\cos y + \sin y}\right) dy$

$= [y]_0^{\frac{\pi}{2}} - I$.

ainsi $2I = \frac{\pi}{2}$ et $I = \frac{\pi}{4}$.

$J = \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$, on pose $x = \sin\theta$ où $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ie $\theta = \arcsin x$.

et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta}\frac{dx}{d\theta}$ or $\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$.

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = I = \frac{\pi}{4}$.

Exo 3.

g). $I = \displaystyle\int \frac{3 - \sin x}{2\cos x + 3\tan x}\,dx$. I est défini $\forall x \in \mathbb{R}$ tq $\cos x \neq 0$ et $\dfrac{2\cos^2 x + 3\sin x}{\cos x} \neq 0$.

$$= \int \frac{3\cos x - \sin x \cos x}{2\cos^2 x + 3\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{3 - y}{2(1-y^2)+3y}\,dy \quad \text{avec } y = \sin x,\ dy = y' = \cos x.$$

$$= \int \frac{3 - y}{-2y^2+3y+2}\,dy \qquad -2y^2+3y+2 = 0,\ \Delta = 9+16 = 5^2,\ \text{d'où } y = \frac{-3\pm5}{-4} = \frac{3\pm5}{4},\ \text{d'où } y = 2 \text{ ou } y = -\frac{1}{2}.$$

et $\dfrac{3-y}{-2y^2+3y+2} = \dfrac{3-y}{-2(y+\frac{1}{2})(y-2)} = \dfrac{\alpha}{y+\frac{1}{2}} + \dfrac{\beta}{y-2} \iff \alpha(y-2) + \beta(y+\tfrac{1}{2}) = (\alpha+\beta)y + \dfrac{\beta}{2} - 2\alpha = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{2} \iff \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{1}{2} \\ \frac{\beta}{2} - 2\alpha = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{1}{5} \\ \alpha = \frac{7}{10} \end{cases}$

et $I = \dfrac{7}{10}\displaystyle\int \frac{dy}{y+\frac{1}{2}} - \frac{1}{5}\int \frac{dy}{y-2} = \frac{7}{10}\ln|y+\tfrac{1}{2}| - \frac{1}{5}\ln|y-2| + C$

$= \dfrac{7}{10}\ln|\sin x + \tfrac{1}{2}| - \dfrac{1}{5}\ln(2 - \sin x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.