

**I – Succession d'épreuves indépendantes**

**1) Univers et issues d'une succession d'épreuves**

DEFINITION (Rappel) :

Deux épreuves successives sont indépendantes lorsque le résultat de la première n'influe pas sur le résultat de la seconde.

DEFINITION :

Lorsqu'une expérience aléatoire se compose d'une succession de  $n$  épreuves indépendantes  $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ , l'univers des issues possibles est le produit cartésien  $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \dots \times \Omega_n$  où  $\Omega_i$  désigne l'univers de l'épreuve  $E_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .

Une issue de la succession d'épreuves est donc un  $n$ -uplet  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  où  $i_p$  est une issue de  $E_p$ .

Remarque :

On représente cette situation par un arbre dans lequel un chemin correspond à une issue.

**2) Calcul de probabilités**

PROPRIETE (admise):

Lors d'une succession de  $n$  épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue  $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$  est égale au produit des probabilités de chacune des issues de  $n$ -uplet.

Exemple : On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4 puis à tirer au hasard un jeton d'un sac contenant un jeton A et deux jetons B.



L'univers de la première épreuve est  $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$

La loi de probabilité de cette 1<sup>ère</sup> épreuve est résumée dans le tableau ci-dessous :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

L'univers de seconde épreuve est  $\Omega_2 = \{A, B\}$

La loi de probabilité de cette 2<sup>nde</sup> épreuve est résumée dans le tableau ci-dessous :

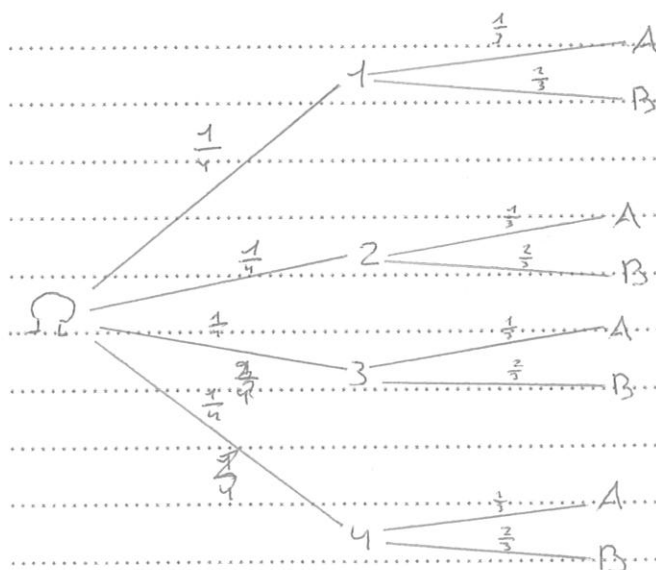
Issue	A	B
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

La réalisation de la première épreuve n'a aucune influence sur la réalisation de la 2<sup>nde</sup> donc les deux épreuves sont indépendantes.

L'univers  $\Omega$  de la succession des deux expériences précédentes est le produit cartésien des univers des expériences :

$$\Omega = \{(1;A), (1;B), (2;A), (2;B), (3;A), (3;B), (4;A), (4;B)\}$$

On peut représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Par exemple :

$$P(1;A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad P(3;A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12} \quad P(1;B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes :

Issue	(1;A)	(1;B)	(2;A)	(2;B)	(3;A)	(3;B)	(4;A)	(4;B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

## II – Epreuve, loi et schéma de Bernoulli

Histoire des mathématiques



*Jacques Bernoulli (1654 – 1705) est un mathématicien suisse célèbre pour ses travaux en probabilités et leurs applications à l'économie et aux questions sociales.*

### 1) Epreuve de Bernoulli

**DEFINITION :**

Soit  $p$  un réel compris entre 0 et 1. On appelle **épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$**  toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues, l'une et appelée succès (S), dont la proba...

- l'une est appelé succès, S, dont la probabilité est  $p$ .
- l'autre est appelé échec,  $\bar{S}$ , dont la probabilité est  $1-p$ .

- Exemples :
- Lors du lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, on appelle succès le fait d'obtenir Pile.  
C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{2}$ .
  - Lors du lancer d'un dé équilibré à six faces, on appelle succès le fait d'obtenir 4.  
C'est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{1}{6}$ .

Application : Une classe de Terminale compte 34 élèves dont 16 garçons.  
On choisit au hasard la fiche d'un élève et on observe s'il s'agit d'une fille.  
Reconnaitre une épreuve de Bernoulli, définir le succès, l'échec et donner son paramètre.

*Choisir au hasard la fiche d'un élève est une épreuve de Bernoulli.  
Le succès  $S$  est la fiche est celle d'une fille.  
L'échec  $\bar{S}$  est la fiche est celle d'un garçon.  
 $P(S) = 1 - \frac{16}{34} = \frac{18}{34} = \frac{9}{17}$ . donc choisir une fiche au hasard est  
une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = \frac{9}{17}$ .*

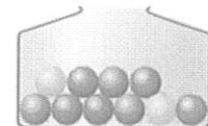
## 2) Loi de Bernoulli

### DEFINITION :

On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .  
La variable aléatoire  $X$  qui prend la valeur 1 en cas de succès  
et 0 en cas d'échec suit la loi présentée dans le tableau ci-contre,  
appelée *loi de Bernoulli*.

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	$p$

Exemple : Une urne contient dix boules indiscernables au toucher :  
5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.  
On tire une boule au hasard et on note sa couleur.



Cette expérience a trois issues mais on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli en prenant par exemple pour succès  $S$  : «Tirer une boule rouge» et pour échec  $\bar{S}$  : «Tirer une boule bleu ou jaune».

Les boules sont indiscernables au toucher, donc on est dans une situation d'égalité de probabilité.  
La probabilité du succès de l'épreuve de Bernoulli est  $\frac{3}{10}$ .  
La loi de Bernoulli associée est de paramètre  $p = \frac{3}{10}$  et est présentée dans le tableau ci-dessous

$x_i$	0	1
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

### PROPRIETES :

Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  alors :

- L'espérance de  $X$  est :  $E(X) = p$
- La variance de  $X$  est :  $V(X) = p(1-p)$
- L'écart-type de  $X$  est :  $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration :

$$E(X) = (1 - p) \times 0 + p \times 1 = p$$

$$V(X) = (1 - p) \times (0 - E(X))^2 + p \times (1 - E(X))^2$$

$$= (1 - p) \times p^2 + p \times (1 - p)^2$$

$$= p(1 - p)(p + (1 - p))$$

$$V(X) = p(1 - p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$$

### 3) Schéma de Bernoulli

#### DEFINITIONS :

Soit  $p$  un réel compris entre 0 et 1 et  $n$  un entier naturel non nul.

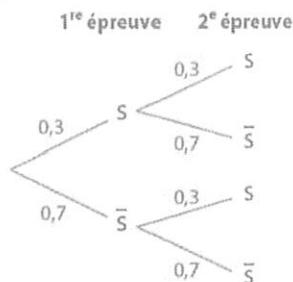
- Lorsqu'on répète  $n$  fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ , on définit un schéma de Bernoulli de paramètre  $n$  et  $p$ .
- Une issue de cette expérience aléatoire est une liste de  $n$  lettres prises parmi  $S$  et  $\bar{S}$ , du type :  $(S, \bar{S}, S, \dots, S)$ .  
 $n$  lettres
- L'univers de cette expérience aléatoire est donc  $\Omega = \{S; \bar{S}\}^n$ .

Exemple : On répète deux fois l'expérience de l'exemple précédent en notant à chaque fois la couleur de la boule tirée avant de la replacer dans l'urne.

Le fait de replacer la boule dans l'urne assure que les tirages sont identiques et indépendants.

La répétition, deux fois, de cette même épreuve de Bernoulli constitue donc un schéma de Bernoulli de paramètre  $n = 2$  et  $p = \frac{3}{10}$ .

qui peut être représenté par l'arbre pondéré ci-dessous :



Application : Alex essaie trois fois de suite d'atteindre une cible à l'aide d'une arbalète.

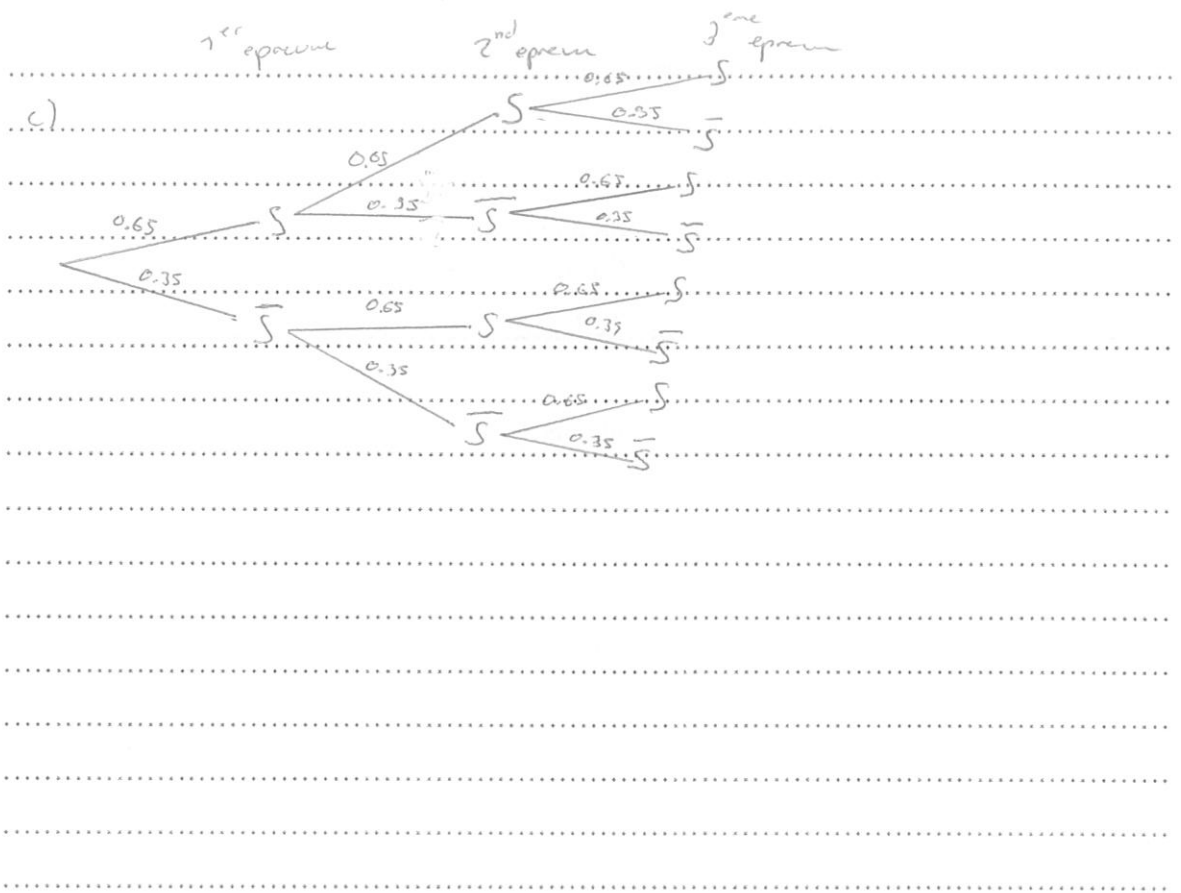
On estime qu'elle atteint la cible dans 65 % des cas et on suppose que les tirs sont indépendants.

- Associer une épreuve de Bernoulli à chaque tir et donner la probabilité du succès  $S$ .
- Expliquer pourquoi on peut associer un schéma de Bernoulli à cette situation, puis préciser les paramètres de ce schéma de Bernoulli.
- Représenter ce schéma par un arbre pondéré.

a) On tire sur la cible et on essaie de l'atteindre.  
Le succès  $S$  à atteindre la cible a une probabilité  $p = 0,65$ .  
L'échec  $\bar{S}$  à atteindre la cible a une probabilité  $1 - p = 0,35$ .

Donc chaque tir est une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p = 0,65$ .

b) Cette épreuve de Bernoulli est répétée 3 fois de façon indépendante.  
On peut donc associer un schéma de Bernoulli de paramètre  $n = 3$  et  $p = 0,65$ .



### III – Loi binomiale

#### 1) Loi du nombre de succès

##### DEFINITION :

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  et  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans ce schéma. On dit que  $X$  suit la loi binomiale (ou loi de nombre de succès) de paramètres  $n$  et  $p$ , on la note  $B(n; p)$ .

Remarque : La variable aléatoire  $X$  prend donc toutes les valeurs entières comprises entre 0 (aucun succès) et  $n$  (uniquement des succès).  $X \in \llbracket 0; n \rrbracket$

Exemple : On tire au hasard, successivement et **avec remise**, quatre cartes d'un jeu de 32 cartes. Soit  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de cœurs obtenus.

Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Tirer une carte au hasard est une épreuve de Bernoulli de succès "la carte est un cœur" de probabilité  $p = \frac{1}{4}$ .  
On répète quatre fois cette épreuve de manière identique et indépendante (on tire avec remise), il s'agit d'un schéma de Bernoulli de paramètres  $n = 4$  et  $p = \frac{1}{4}$ . La variable aléatoire  $X$  comptant le nombre de succès suit la loi binomiale  $B(4; \frac{1}{4})$ .

## 2) Méthodes de calcul des coefficients binomiaux

### a) Coefficients binomiaux

#### DEFINITION :

On considère un schéma de Bernoulli formé de  $n$  épreuves répétées et  $k$  un entier naturel tel que  $0 \leq k \leq n$ .  
 On appelle **coefficient binomial** et on note  $\binom{n}{k}$  (lire «**combinaison de k parmi n**» ou «**k parmi n**»)  
 C'est le nombre de chemins réalisant  $k$  succès parmi les  $n$  épreuves.....

Exemples : • A l'aide de l'arbre ci-contre, calculer  $\binom{4}{2}$ .

$\binom{4}{2}$  est ...le nombre de chemins réalisant exactement 2 succès parmi les 4 épreuves..... donc  $\binom{4}{2} = 6$ .

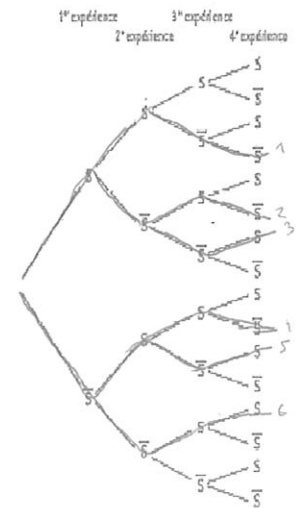
• De même donner la valeur de  $\binom{4}{0}$ ,  $\binom{4}{1}$ ,  $\binom{4}{3}$  et  $\binom{4}{4}$ .

On cherche les chemins réalisant exactement 0 succès parmi les 4 épreuves... donc  $\binom{4}{0} = 1$

On cherche les chemins réalisant exactement 1 succès parmi les 4 épreuves... donc  $\binom{4}{1} = 4$

On cherche les chemins réalisant exactement 3 succès parmi les 4 épreuves... donc  $\binom{4}{3} = 4$

On cherche les chemins réalisant exactement 4 succès parmi les 4 épreuves... donc  $\binom{4}{4} = 1$



### b) Propriétés des coefficients binomiaux

#### PROPRIÉTÉS :

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels.

• Par convention,  $\binom{0}{0} = 1$

• Il existe .....1..... chemin dans l'arbre réalisant 0 succès parmi  $n$  épreuves donc  $\binom{n}{0} = 1$ .....

• Il existe .....n..... chemins dans l'arbre réalisant 1 succès parmi  $n$  épreuves donc  $\binom{n}{1} = n$ .....

• Il existe .....1..... chemin dans l'arbre réalisant  $n$  succès parmi  $n$  épreuves donc  $\binom{n}{n} = 1$ .....

### c) Calculs des coefficients binomiaux

#### DEFINITION :

$n$  est un entier naturel tel que  $n \geq 1$ .

On appelle **factorielle n** et on note  $n!$  ...est le produit de tout les entiers naturels de 1 à n.....

Ainsi :  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

Exemples :  $5! = \dots 120 \dots$   
 $100! = \dots \prod_{k=1}^{100} k \dots$   
 $1! = \dots 1 \dots$   
 $0! = 1$  par convention

**PROPRIETE :**

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $p \leq n$ , on a :

~~$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$~~   $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple : - Pour calculer ces nombres à la main, on utilise la formule précédente.

$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \times 6}{2} = 15$

- On peut aussi utiliser la calculatrice :

Sur TI-83 Premium CE :

Autre possibilité :

Remarque : D'autres propriétés relatives aux coefficients binomiaux seront étudiées ultérieurement.

### 3) Calcul d'une probabilité dans le cadre d'une loi binomiale

**PROPRIETE :**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $B(n; p)$ .

Pour tout nombre entier naturel  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ ,  $P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

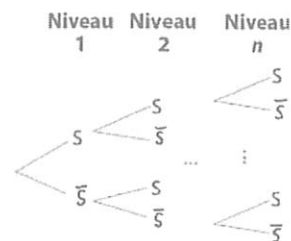
**Démonstration au programme :**

Les  $n$  épreuves répétées sont identiques et indépendantes donc un chemin de l'arbre réalisant  $k$  succès de probabilité  $p$  et  $n - k$  échecs de probabilité  $1 - p$ , conduit à une issue dont la probabilité est donnée par  $p^k (1 - p)^{n-k}$ .

Comptons le nombre de chemins réalisant  $k$  succès :

Un chemin peut être représenté par une succession de  $n$  cases où l'on inscrit  $S$  ou  $\bar{S}$ .

Le nombre de chemins avec  $k$  succès est le nombre de choix de  $k$  cases parmi  $n$  où l'on inscrit la lettre  $S$ . Ces choix sont les combinaisons de  $k$  positions parmi  $n$  (pas de répétition et pas d'ordre).



Il y a donc  $\binom{n}{k}$  chemins réalisant  $k$  succès donc  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \times (1 - p)^{n-k}$ .

PROPRIÉTÉ :

admirable

Si  $X$  est une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre  $p$  alors :

- L'espérance de  $X$  est :  $E(X) = np$
- La variance de  $X$  est :  $V(X) = np(1-p)$
- L'écart-type de  $X$  est :  $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. On a justifié que la variable aléatoire  $X$ , donnant le nombre total de cœurs obtenus, suit la loi binomiale  $B(4; \frac{1}{4})$ .

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .

Les valeurs prises par  $X$  sont : 0, 1, 2, 3, 4.

$P(X=0) = \binom{4}{0} (\frac{1}{4})^0 \times (1-\frac{1}{4})^4 = 1 \times 1 \times \frac{3^4}{4^4} = \frac{81}{256}$

$P(X=1) = \binom{4}{1} (\frac{1}{4})^1 \times (1-\frac{1}{4})^3 = 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{3^3}{4^3} = 1 \times \frac{27}{64} = \frac{27}{64}$

$P(X=2) = \binom{4}{2} (\frac{1}{4})^2 \times (1-\frac{1}{4})^2 = 6 \times \frac{1}{16} \times \frac{9}{16} = \frac{3}{8} \times \frac{3}{16} = \frac{27}{128}$

$P(X=3) = \frac{3}{64}$

$P(X=4) = \frac{1}{256}$

La loi de probabilité de  $X$  est résumée dans le tableau ci-dessous :

$k$	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

2. Quelle est la probabilité pour qu'exactement trois cartes soient des cœurs ?

$P(X=3) = \frac{3}{64}$  la probabilité pour qu'exactement trois cartes soient des cœurs est égale à  $\frac{3}{64}$ .

3. Quelle est la probabilité pour qu'au moins l'une des cartes soit un cœur ?

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256}$   
la probabilité pour qu'au moins l'une des cartes soient un cœur est égale à  $\frac{175}{256}$ .

4. Quelle est la probabilité pour qu'au plus deux cartes soient un cœur ?

$P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) - P(X=4) = 1 - \frac{3}{64} - \frac{1}{256} = \frac{243}{256}$   
la probabilité pour qu'au plus deux cartes soient un cœur est égale à  $\frac{243}{256}$ .

5. Calculer  $P(X > 2)$  puis  $P(X < 2)$

$$P(X > 2) = P(X=3) + P(X=4) = \frac{13}{256}$$

$$P(X < 2) = 1 - P(X=2) - P(X > 2) = \frac{121}{256}$$

6. Calculer l'espérance mathématique de  $X$ . Interpréter le résultat.

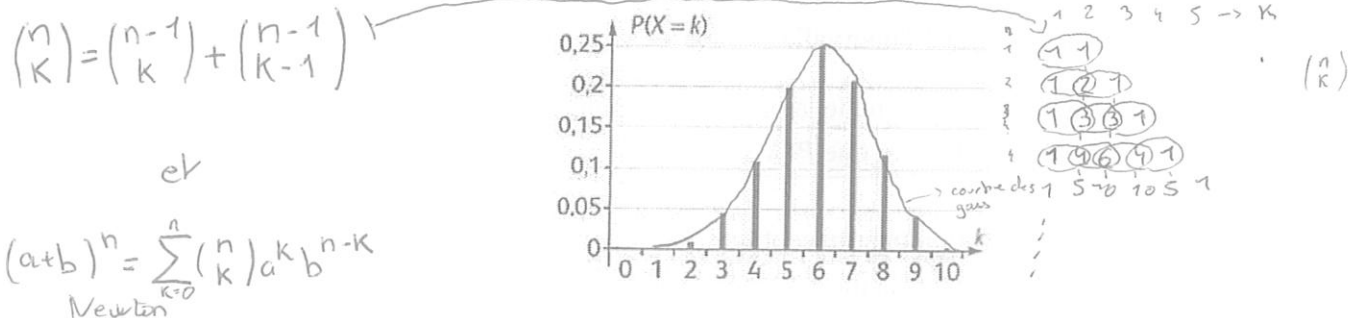
$$E(X) = np = 4 \times \frac{1}{4} = 1$$

On peut espérer obtenir en moyenne 1 cœur par partie lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Remarque : On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un **diagramme en bâtons** en mettant :

- en **abscisse** les **valeurs prises** par la variable aléatoire (soit les valeurs  $k$  de  $X$ )
- et en **ordonnée** les **probabilités** correspondantes (soit les valeurs de  $P(X = k)$ ).

Par exemple la loi binomiale  $B(10; 0,6)$  est représentée par le diagramme en bâtons ci-dessous :

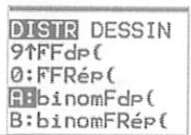
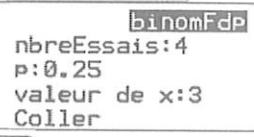


#### 4) Calculatrice et loi binomiale

Il s'agit de calculer directement des probabilités de la forme  $P(X = k)$  ou  $P(X \leq k)$  où  $X$  suit une loi binomiale, à l'aide d'une calculatrice.

##### a) Probabilité $P(X = k)$

Retrouvons la valeur de  $P(X = 3)$  où  $X$  suit la loi binomiale  $B(4; \frac{1}{4})$  calculée dans l'exemple précédent. Sur TI-83 Premium CE :

Etape 1	On accède au menu <b>distrib</b> en appuyant successivement sur les touches <b>2nde</b> puis <b>var</b>
Etape 2	On sélectionne <b>A:binomFdp</b> dans le menu ci-contre : 
Etape 3	On obtient le menu ci-contre dans lequel on rentre dans l'ordre : <b>n</b> (ici 4), <b>p</b> (ici 0.25) et <b>k</b> (ici 3) puis on valide en sélectionnant <b>coller</b> . 
Etape 4	<b>binomFdp(4,0.25,3)</b> est affiché à l'écran, on le valide avec la touche <b>entrer</b> pour afficher la probabilité cherchée : <b>binomFdp(4,0.25,3)</b> .....0.046875

b) Probabilité  $P(X \leq k)$

Retrouvons la valeur de  $P(X \leq 2)$  où  $X$  suit la loi binomiale  $B(4; \frac{1}{4})$  calculée dans l'exemple précédent.

On procède de façon analogue mais à l'étape 2, on sélectionne **B : binomFRep**

A l'étape 4, on obtient alors : `binomFRep(4, 0.25, 2)`  
..... 0,94921875.

c) Exemple

On considère la variable aléatoire  $X$  qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 50$  et  $p = 0,23$ .

Calculer à l'aide de la calculatrice :  $P(X < 12)$ ,  $P(X \geq 4)$  et  $P(5 < X \leq 8)$ .

$P(X < 12) = P(X \leq 11) \approx 0,5122$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0,9986$

$P(5 < X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 5) \approx 0,1904$

IV – Utiliser la loi binomiale pour résoudre un problème de seuil ou d'intervalle

1) Détermination d'une valeur correspondant à un seuil

On considère un nombre réel  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

Principe : Déterminer la valeur à partir de laquelle la probabilité cumulée dépasse un seuil  $\alpha$  consiste à trouver la plus petite valeur de  $k$  tel que  $P(X \leq k) \geq \alpha$ .

Exemple : Dans une chaîne de production pharmaceutique, la proportion de gélules non commercialisables en sortie de chaîne est 3%. Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 200 gélules, associe le nombre de gélules non commercialisables.






1. Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
2. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le plus petit entier  $b$  tel que  $P(X \in [0; b]) \geq 0,9$  ;
3. Interpréter le résultat précédent.

1. Choisir une gélule au hasard est une épreuve de Bernoulli...  
 de succès "la gélule n'est pas commercialisable" de probabilité 0,03.  
 Tester les 200 gélules d'un échantillon\* constitue un schéma de Bernoulli  
 de paramètre  $n = 200$  et  $p = 0,03$ .  
 $X$  est la variable aléatoire comptant le nombre de succès et suit  
 la loi binomiale  $B(200; 0,03)$ .

\* revient à répéter cette épreuve 200 fois de manière indépendante et

2. Comme  $P(X \in [0 ; b]) = P(X \leq b)$ , on construit la table des valeurs  $P(X \leq k)$

Sur TI-83 Premium CE :

Etape 1	Sélectionner le menu  et dans Y1 saisir <b>binomFRép(200,0.03,X)</b> suivi de   .
Etape 2	Choisir alors   pour voir le tableau de valeurs s'afficher :

X	Y1
0	0.0023
1	0.0162
2	0.0593
3	0.1472
4	0.281
5	0.4432
6	0.6063
7	0.7461
8	0.8504
9	0.9192
10	0.9599

En parcourant la table de valeurs on lit que :  $P(X \leq 8) \approx 0.8504$  et  $P(X \leq 9) \approx 0.9192$   
 donc le plus petit entier  $b$  pour lequel  $P(X \leq b) \geq 0.9$  est 9.

3. Au moins 10% de échantillon de 200 gelules contiennent  
 au moins de 10 gelules non-commerciables.

Remarque :

Pour un tableau de valeurs de  $P(X = k)$ , on procède de façon analogue en utilisant l'instruction **binomFdp**

**2) Détermination d'un intervalle**

Principe : Déterminer un intervalle de probabilité supérieure à  $\alpha$  consiste à trouver deux nombres entiers  $a$  et  $b$  tels que :  $0 \leq a \leq b \leq n$  et  $P(a \leq X \leq b) \geq \alpha$

Exemple : On s'intéresse à la proportion de faces marquées 1 obtenues quand on lance un dé tétraédrique bien équilibré (dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4).

Soit  $Y$  la variable aléatoire qui, à chaque série de 100 lancers, associe le nombre de 1 obtenus.

1. Quelle loi suit  $Y$  ?
2. Déterminer les entiers  $a$  et  $b$  tels que :
  - $a$  est le plus petit entier tel que  $P(Y \leq a) > 0,025$
  - et  $b$  est le plus petit entier tel que  $P(Y \leq b) \geq 0,975$ .
3. En déduire un intervalle  $I$  tel que  $P(Y \in I) \geq 0,95$ . Interpréter ce résultat.

Lancer un dé tétraédrique bien équilibré et se expose de Bernoulli de succès "obtenir 1" et de probabilité  $\frac{1}{4}$ .  
 Répéter cette épreuve 100 de fois de manière indépendante et inchangée.

construit un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire  $Y$  compte le nombre de succès obtenus sur la  
bi. Binomiale  $B(100; \frac{1}{4})$ .

2. On construit la table de valeur  $P(Y \leq k)$  pour  $\mathbb{Z}$   $0 \leq k \leq 100$

• on a par  $P(Y \leq 16) \approx 0.211$  et  $P(Y \leq 17) \approx 0.0376$ .

• on a par  $P(Y \leq 33) \approx 0.9724$  et  $P(Y \leq 34) \approx 0.9836$ .

donc  $a = 17$  et  $b = 34$ .

$$3. P(17 \leq Y \leq 34) = P(Y \leq 34) - P(Y \leq 17)$$

$$\text{or } P(Y \leq 34) \approx 0.9836$$

$$\text{et } P(Y \leq 16) \leq 0.025 \text{ soit } -P(Y \leq 16) \geq -0.025$$

$$\text{On en déduit que } P(Y \leq 34) - P(Y \leq 16) \geq 0.95$$

$$\text{soit } P(17 \leq Y \leq 34) \geq 0.95$$

$$\text{ou } P(Y \in [17, 34]) \geq 0.95$$

La probabilité d'obtenir entre 17 et 34 fois la face 1  
au cours des 100 lancers est de supérieurement à 95%.

## I - Transformations de variables aléatoires

## 1) Transformation affine

DEFINITION :

Soit  $X$  une variable aléatoire. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels.

On note  $x_1; x_2; \dots; x_n$  les valeurs prises par  $X$ . La variable aléatoire  $Y$  définie par  $Y = aX + b$  est la variable aléatoire qui prend pour valeurs les réels  $y_i = ax_i + b$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$ .

PROPRIETE :

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $Y$  la variable aléatoire définie par  $Y = aX + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels.

L'espérance de  $Y$  est :  $E(Y) = E(aX + b) = aE(X) + b$

La variance de  $Y$  est :  $V(Y) = V(aX + b) = a^2V(X)$

Cette propriété est admise.

Exemple : Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 2$  et  $p = 0,2$  et soit  $Y = 4X - 0,6$ .

On a :

$$E(X) = np = 2 \times 0,2 = 0,4$$

$$\text{et } V(X) = np(1 - p) = 2 \times 0,2 \times 0,8 = 0,32$$

On a alors :

$$E(Y) = E(4X - 0,6) = 4E(X) - 0,6 = 4 \times 0,4 - 0,6 = 1$$

$$V(Y) = V(4X - 0,6) = 4^2V(X) = 16 \times 0,32 = 5,12$$

Application Une salle de sport propose trois salles d'entraînement : la salle FIT, la salle STRONG et la salle ZEN. On ne peut s'inscrire que dans une seule des salles, mais on peut disposer en plus de séances de coaching personnalisé.

- Parmi les 500 adhérents, 225 sont inscrits à la salle FIT, 60 à la salle ZEN et les autres à la salle STRONG.
- Parmi les utilisateurs de la salle FIT, 9 sont inscrits au coaching, comme 43 des utilisateurs de la salle STRONG et 48 de la salle ZEN.
- Les tarifs mensuels de l'abonnement sont les suivants : 60€ pour la salle FIT ; 40€ pour la salle STRONG et 50€ pour la salle ZEN. Le coaching personnalisé coûte 20€ supplémentaires par mois.

On appelle  $X$  la variable aléatoire donnant le coût mensuel, en euros, de l'abonnement d'un adhérent choisi au hasard dans la salle de sport.

- 1) Établir un tableau des effectifs décrivant la répartition des abonnés.
- 2) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- 3) Calculer  $E(X)$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- 4) La salle propose une réduction de 10 % des tarifs avec l'achat d'une carte de fidélité de 24€ par an. En moyenne, cette promotion est-elle avantageuse pour un abonné ?

### Exemple :

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque paquet de chips issu d'une chaîne de production, associe sa masse en grammes.

On note  $X_i$  la variable aléatoire qui, à chaque lot de 3 paquets de chips, associe la masse du  $i$ -ème paquet. Les variables  $X_1, X_2$  et  $X_3$  sont indépendantes et suivent la même loi que  $X$ , donc  $(X_1, X_2, X_3)$  est un échantillon de taille 3 de la loi de  $X$ .

## 2) Somme d'un échantillon

### DEFINITION :

La **variable aléatoire somme** d'un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$  est la variable aléatoire définie sur l'ensemble des échantillons de taille  $n$  par  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

### PROPRIETES :

Soit  $S_n$  la variable aléatoire somme d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors :

$$\bullet E(S_n) = nE(X) \qquad \bullet V(S_n) = nV(X) \qquad \bullet \sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$$

### Démonstrations :

Pour  $k$  compris entre 1 et  $n$  :  $E(X_k) = E(X)$  et  $V(X_k) = V(X)$

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n).$$

D'où  $E(S_n) = nE(X)$ .

$X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires indépendantes, donc :

$$V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n).$$

On en déduit :  $V(S_n) = nV(X)$ , et  $\sigma(S_n) = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X)} = \sqrt{n}\sigma(X)$ .

### Exemple :

Le Yam's est un jeu dans lequel on lance cinq dés équilibrés à six faces numérotés de 1 à 6, pour obtenir certaines combinaisons particulières. Pour l'une de ces combinaisons, appelée « Chance », on marque la somme des numéros obtenus avec les cinq dés.

Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points que l'on peut ainsi obtenir.

*Arrondir au centième si besoin.*

Soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé. Voici sa loi de probabilité :

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Le résultat de chaque dé est indépendant des autres, donc les variables aléatoires  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  sont indépendantes. Un lancer de cinq dés est alors un échantillon  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  de taille 5 de la loi de probabilité suivie par  $X$ . La variable aléatoire  $S_5$  somme de cet échantillon compte ainsi le nombre total de points obtenus.

A l'aide de la calculatrice, on obtient :  $E(X) = 3,5$  et  $\sigma(X) \approx 1,71$

On en déduit que :

$$E(S_5) = 5E(X) = 5 \times 3,5 = 17,5$$

$$\sigma(S_5) = \sqrt{5}\sigma(X) \approx \sqrt{5} \times 1,71 \text{ soit } \sigma(S_5) \approx 3,82$$

### 3) Moyenne d'un échantillon

#### DEFINITION :

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est un échantillon de taille  $n$  de la loi de  $X$ .

La **variable aléatoire moyenne** de cet échantillon est la variable aléatoire  $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$ .

Exemple : Si on reprend l'exemple de la variable aléatoire  $X$  du paragraphe III) 1) :

- La variable aléatoire  $S_3$ , définie par  $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$  associée à chaque lot sa masse en grammes.
- La variable aléatoire  $M_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  associée à chaque lot de 3 paquets la masse moyenne d'un paquet.

#### PROPRIETES :

Soit  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ , alors :

$$\bullet E(M_n) = E(X) \qquad \bullet V(M_n) = \frac{V(X)}{n} \qquad \bullet \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

#### Démonstrations :

• On sait que pour tout réel  $a \neq 0$ ,  $E(aX) = aE(X)$ .

Donc,  $E(M_n) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$ .

• On sait que pour tout réel  $a \neq 0$ ,  $V(aX) = a^2V(X)$ .

Par conséquent,  $V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$ .

On en déduit que  $\sigma(M_n) = \frac{\sqrt{V(X)}}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

#### Exemple :

Pendant la fête de l'école, Constantine a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel elle peut gagner un certain nombre de points, noté  $X$ .

Voici la loi de probabilité de  $X$ .

$a$	0	5	10	20	50	100
$P(X = a)$	0,6	0,2	0,1	0,06	0,03	0,01



Déterminer l'espérance et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties.

Les 10 parties sont indépendantes les unes des autres donc elles constituent un échantillon  $(X_1, X_2, \dots, X_{10})$  de taille 10 de la loi de probabilité de  $X$ .

La variable aléatoire  $M_{10}$  moyenne de cet échantillon modélise alors le gain moyen.

À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$E(X) = 5,7 \text{ et } \sigma(X) \approx 13,47$$

$$\text{Donc : } E(M_{10}) = 5,7 \text{ et } \sigma(M_{10}) \approx \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx \frac{13,47}{\sqrt{10}} \text{ soit } \sigma(M_{10}) \approx 4,26$$

Le gain moyen par partie est :

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{10}}{10}$$

c'est-à-dire  $M_{10}$ .

### III – Loi des grands nombres

#### 1) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

La principale interprétation de l'écart type  $\sigma$  réside dans le fait que les écarts avec l'espérance sont de l'ordre de  $\sigma$ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev précise cette idée.

##### PROPRIÉTÉ :

Soit  $X$  une variable aléatoire. Pour tout réel  $\delta$  strictement positif, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

Cette propriété est admise

Interprétation : La probabilité que les valeurs prises par  $X$  s'écartent d'au moins  $\delta$  de l'espérance  $E(X)$  est d'autant plus petite que  $\delta$  est grand.

##### Histoire des mathématiques



**Irénée-Jules Bienaymé** (1796 – 1878) est un mathématicien français qui a énoncé cette inégalité en 1853. Mais c'est **Pafnouti Tchebychev** (1821 – 1894), mathématicien russe, qui l'a démontrée en 1867.

##### Remarques :

- $1 - P(|X - E(X)| \geq \delta) = P(E(X) - \delta < X < E(X) + \delta)$
- On dit que  $[E(X) - \delta ; E(X) + \delta]$  est un **intervalle de fluctuation** de  $X$ .

##### Application :

On lance 3 600 fois une pièce de monnaie non truquée.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui associe à cette expérience le nombre de Pile obtenus.

1. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev relative à la variable  $X$ .
2. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000.

①  $X$  suit la loi binomiale de paramètres 3 600 et 0,5. Elle a pour espérance

$$\mu = 3\,600 \times 0,5 = 1\,800 \text{ et pour variance } V(X) = 3\,600 \times 0,5 \times 0,5 = 900.$$

On écrit alors l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :  $P(|X - 1800| \geq \delta) \leq \frac{900}{\delta^2}$ , pour tout réel  $\delta > 0$ .

② On remarque que :  $]1\,600 ; 2\,000[ = ]1\,800 - 200 ; 1\,800 + 200[$ .

On a alors :  $X \in ]1\,600 ; 2\,000[$  équivaut à  $|X - 1\,800| < 200$ .

$$P(X \in ]1\,600 ; 2\,000[) = P(|X - 1800| < 200) = 1 - P(|X - 1800| \geq 200).$$

On remplace  $\delta$  par 200 dans l'inégalité donnée à la question 1 :

$$P(|X - 1800| \geq 200) \leq \frac{900}{200^2}.$$

$$\text{Or } \frac{900}{200^2} = 0,0225$$

Ainsi  $1 - P(|X - 1800| \geq 200) \geq 1 - 0,0225$ , soit  $P(1\,600 < X < 2\,000) \geq 0,9775$ .

La probabilité que le nombre d'apparitions de Pile soit strictement compris entre 1 600 et 2 000 est au moins de 97,75 %.

## 2) Inégalité de concentration

### PROPRIÉTÉ :

Soit la variable aléatoire moyenne  $M_n$  d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \delta^2}$$

Cette propriété est admise

### Histoire des mathématiques



C'est **Jacques Bernoulli** (1654 – 1705) qui publie l'une des premières versions de ce résultat dans son ouvrage posthume Ars Conjectandi en 1713. Il le démontre dans le cas particulier de la loi binomiale.

### Application : Utiliser l'inégalité de concentration pour définir une taille d'échantillon

On effectue  $n$  tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On note  $X$  la variable aléatoire qui, à un tirage donné, associe 1 si la boule tirée est rouge, et 0 sinon, et  $M_n$  la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .

1. Déterminer  $E(X)$  et  $V(X)$ , puis écrire l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ .
2. A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera strictement comprise entre 0,35 et 0,45 ?

1  $X$  est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre  $\frac{2}{5} = 0,4$  donc  $E(X) = 0,4$  et  $V(X) = 0,4 \times (1 - 0,4) = 0,24$ . On écrit l'inégalité de concentration relative à  $M_n$ , variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$  avec  $\mu = 0,4$  et  $V = 0,24$  :

$$P(|M_n - 0,4| \geq \delta) \leq \frac{0,24}{n \delta^2}, \text{ pour tout réel } \delta > 0.$$

2 On cherche ici le plus petit entier  $n$  tel que  $P(0,35 < M_n < 0,45) > 0,95$ .

On remarque que  $0,35 < M_n < 0,45$  équivaut à  $|M_n - 0,4| < 0,05$ .

On veut que  $M_n$  vérifie :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$ .

L'événement contraire de  $\{|M_n - 0,4| < 0,05\}$  est  $\{|M_n - 0,4| \geq 0,05\}$ .

Ainsi :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) = 1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05)$ .

Donc :  $P(|M_n - 0,4| < 0,05) > 0,95$  équivaut à  $1 - P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) > 0,95$

soit  $P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) < 0,05$  (1).

L'inégalité de concentration avec  $\delta = 0,05$  s'écrit :

$$P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{0,24}{n \times 0,05^2}, \text{ soit } P(|M_n - 0,4| \geq 0,05) \leq \frac{96}{n}$$

L'inégalité (1) sera vérifiée si l'on choisit  $n$  tel que  $\frac{96}{n} < 0,05$ .

On en déduit :  $0,05n > 96$ , soit  $n > \frac{96}{0,05}$

$\frac{96}{0,05} = 1\,920$ , donc le nombre minimal de tirages est 1 921.

### 3) Loi des grands nombres

**THEOREME :**

Soit la variable aléatoire moyenne  $M_n$  d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour tout réel strictement positif  $\delta$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

*Ce théorème est admis.*

**Remarque :** La loi des grands nombres traduit le fait que plus la taille de l'échantillon d'une variable aléatoire  $X$  est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire  $X$  est faible.